

似水准椭球*

郝晓光 刘根友

(中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室,武汉 430077)

摘要 提出了“似水准椭球”概念,给出了“似水准椭球”的“匀质分层”、“整体纬向”和“内匀外纬”3种模式的密度分布方式。针对“似水准椭球”密度分布的合理性和稳定性问题,初步提出了求解“似水准椭球”的拉格朗日函数和哈密顿积分的设想。

关键词 准等位条件 似水准椭球 密度分布 拉格朗日函数 哈密顿积分

中图分类号:P312;P223

文献标识码:A

QUASI LEVEL ELLIPSOID

Hao Xiaoguang and Liu Genyou

(The Key Laboratory of Dynamical Geodesy, Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan 430077)

Abstract This paper presents the conception of “quasi level ellipsoid”. The three density distribution forms including density layered, total latitudinal and two-layer where outside density is distributed along latitude are discussed. In the light of the rationality and stability problem of density distribution of “quasi level ellipsoid”, we primarily put forward the idea to solve “quasi level ellipsoid” using Lagrange function and Hamilton integration.

Key words: quasi level condition, quasi level ellipsoid, density distribution, Lagrange function, Hamilton integration

1 前言

研究地球的形状和密度,是地球重力学的两项基本任务。在地球重力学中,关于地球形状的理论与方法已得到充分发展,而关于地球密度的理论与方法则显得比较薄弱。传统的司托克斯理论与莫洛金斯基理论都是以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状的,地球形状学几乎成了地球重力学的同义词。伴随空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论的不完善,地球形状不应该再是地球重力学永远不变的理论主题,而关于地球整体密度分布方式的板块运动、地幔对流、海底扩张等新问

题的出现,也要求地球重力学的研究重点从地球形状转移到地球密度上来。

在地球重力学中,水准椭球是地球的理论模型。所以,研究地球的密度问题,应该首先研究水准椭球的密度问题。著名地球重力学家莫里茨指出:“水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的”;“试图去求定一切可能的密度分布,这在目前仍是一种科学幻想”^[1]。

莫里茨的观点间接地说明了求解水准椭球密度分布函数的难度,也许可以这样说,水准椭球密度分布函数的求解问题,应该是地球重力学中目前最具

* 收稿日期:2004-12-28

基金项目:中国科学院野外台站研究基金(051114)

作者简介:郝晓光,男,1958年生,上海市人,研究员,理学博士,主要从事地球重力学研究,Email:hxg@asch.whigg.ac.cn

数学魅力的难题之一。

2 “准等位条件”与“似水准椭球”

水准椭球有两个基本条件,一是要满足 1980 大地参考系统的基本常数 (a, b, GM,) ,二是要满足表面重力等位条件。

索米里安推导出水准椭球表面重力的封闭公式为

$$g_0 = \frac{a e \cos^2 B + b_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (1)$$

式中 e 与 p 为水准椭球赤道与极点重力值。式中:

$$\begin{cases} e = \frac{GM}{ab} \left\{ 1 + m \frac{6(e - \arctan e) - 2e^3}{3[3 + e^2] \arctan e - 3e} \right\} \\ p = \frac{GM}{a^2} \left\{ 1 + m \frac{6(1 + e^2)(e - \arctan e) - 2e^3}{3[3 + e^2] \arctan e - 3e} \right\} \\ m = \frac{2a^2 b}{GM}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \end{cases}$$

在文献[2]中,由作者推导出匀质椭球表面重力的封闭公式为

$$g_0 = \frac{\sqrt{a^2 g_e^2 \cos^2 B + b^2 g_p^2 \sin^2 B}}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (2)$$

式中 g_e 与 g_p 为匀质椭球赤道与极点重力值。式中:

$$\begin{cases} g_e = \frac{GM}{ab} \left[\frac{3}{2e^2} \left(\frac{1+e^2}{e} \arctan e - 1 \right) - m \right] \\ g_p = \frac{GM}{a^2} \frac{3(1+e^2)}{e^2} \left(1 - \frac{\arctan e}{e} \right) \end{cases}$$

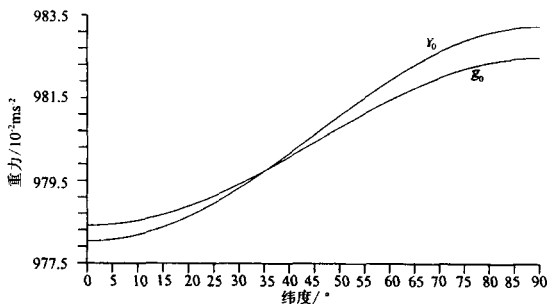


图 1 匀质椭球与水准椭球的重力比较

Fig. 1 Comparison between the gravities of density ellipsoid and level ellipsoid

由图 1 可见,不论是水准椭球还是匀质椭球,其表面重力都只是纬度的函数,且基本上可近似为纬度的线形函数。此外,当分层旋转椭球的密度分布发生变化时,椭球表面的重力曲线只能围绕“重力聚点”旋转^[3]。所以,对于常数 (a, b, GM,) 相同,但密度分布不同的旋转椭球来说,只要满足椭球极点和赤道两点的重力等位条件,就能够近似满足椭球

表面的重力等位条件。因此,我们把极点和赤道“两点等位条件”,称为“准等位条件”;把满足常数 (a, b, GM,) 和“准等位条件”的旋转椭球,称为“似水准椭球”。以 (a, b, GM,) 为基本常数的匀质椭球不满足等位条件,也不满足“准等位条件”。对匀质椭球内的密度进行质量不变的调整,使之满足等位、或“准等位”条件,这应该是我们研究水准椭球密度分布问题的基本方法。“准等位条件”是等位条件的一种近似,“似水准椭球”就是水准椭球的一种近似,但研究“准等位条件”和“似水准椭球”,要比研究等位条件和水准椭球简单得多。

3 “匀质分层”模式的似水准椭球

由文献[4]可知,参数椭球由“匀质分层”的双层椭球构成。参见图 2, i 为内密度参数, e 为外密度参数, n 为界面深度参数。外椭球的长、短半径分别为 a 和 b,内椭球的长、短半径分别为 a_n = na, b_n = nb, 0 < n < 1。

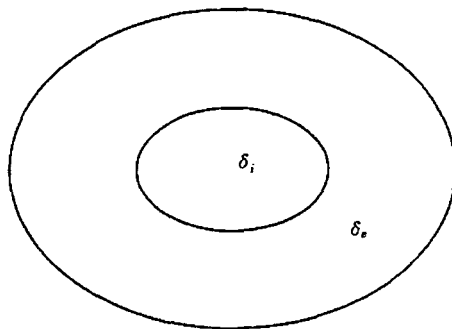


图 2 匀质分层
Fig. 2 Density layered

由于参数椭球的总质量 M 是不变的,对于不加约束条件的参数椭球来说, i, e 和 n 这 3 个参数只有两个是独立的,三者应满足以下函数关系^[3]:

$$i = \frac{1}{n^3} (0 - e) + e \quad (3)$$

由文献[5]可知,如果用“准等位条件”来约束参数椭球, i, e 和 n 这 3 个参数只有一个是独立的,除了以上 i, e 和 n 的函数关系外, i 和 n 还要满足以下函数关系:

$$i = \frac{0}{n^3} - \left(\frac{1-n^3}{n^3} \right) \times \frac{0 E a - \frac{2 e^3 n^3}{2 G(1+e^2)} - \frac{2 b_0}{a(1+)} E_b}{\frac{2 b}{a(1+)} (n^3 E - E_b) - (n^3 E - E_a)} \quad (4)$$

式中:

$$0 = \frac{3M}{4 a^2 b}, = \frac{p - e}{e}$$

$$E = e - \arctane, E = \arctane - \frac{e}{1 + e^2}$$

$$E_b = e_b - \arctane_b, E_a = \arctane_a - \frac{e_a}{1 + e_a^2}$$

$$e_a = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_a}}, e_b = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}}$$

$$c_a = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)]$$

$$c_b = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)]$$

把参数椭球当成地球模型,于是,地球的平均半径为 6 371 km、地核的平均半径为 3 473 km,将地壳并入地幔,则可算得核幔边界的深度参数为 $n = 0.544 872$ 。将 n 代入(4)式,可算得 $i = 13.287 \text{ gcm}^{-3}$ 。再将 n 和 i 代入(3)式,可算得 $e = 4.018 \text{ gcm}^{-3}$ 。所以,“匀质分层”模式的“似水准椭球”的密度分布形式为:

$$n = 0.544 872, e = 4.018, i = 13.287 \text{ gcm}^{-3} \quad (5)$$

4 “整体纬向”模式的似水准椭球

为了研究水准椭球密度按纬度分布的函数,作者在文献[6]中提出了“纬向密度”概念:旋转椭球的向径可由地心纬度确定,定义该向径上所有点密度的平均值,为旋转椭球在该纬度的“纬向密度”,参见图 3。

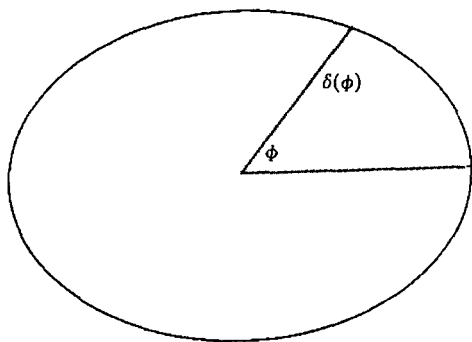


图 3 整体纬向

Fig. 3 Total latitudinal

参见文献[7],设极点和赤道的“纬向密度”分别为 ρ_p 和 ρ_E ,则旋转椭球纬向密度的函数为:

$$\rho(\phi) = \rho_E (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi), \rho = \rho_p / \rho_E \quad (6)$$

为了求解(6)式中的 ρ_E 和 ρ 的数值,以“准等位条件”约束椭球,这时,极点重力的纬向密度积分公式为^[7]:

$$\rho_p = 2 G_E \cos \sin [\rho(\phi, n) - \dots]$$

$$\rho(\phi, 0) d \quad (7)$$

$$\text{式中: } n_0 = \frac{2b(1+e^2)\cos}{1+e^2\cos^2}$$

$$\rho(\phi, r) = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r + b \sin^2 \phi (1 - \dots) \times [\cos \ln(r^2 - 2br\cos \phi + b^2) + \frac{\cos 2\phi}{\sin} \arctan \frac{r - b\cos \phi}{b\sin \phi}]$$

在“准等位条件”的约束下,赤道重力的纬向密度积分公式为^[7]:

$$\rho_E + a^2 = 2 G_E \cos \sin [\rho_E(\phi, n) - \dots] \quad (8)$$

$$\text{式中: } n_0 = \frac{2a\cos}{1 + 0.499 52e^2 \sin^2}$$

$$\rho(\phi, r) = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r + a \sin^2 \phi (\dots - 1) \times [\cos \ln(r^2 - 2ar\cos \phi + a^2) + \frac{\cos 2\phi}{\sin} \arctan \frac{r - a\cos \phi}{a\sin \phi}]$$

联立(7)、(8)两式,便可求解出 ρ_E 和 ρ 的数值,再代入(6)式,则“似水准椭球”的纬向密度分布函数为:

$$\rho(\phi) = 5.496 247 \cos^2 \phi + 5.539 862 \sin^2 \phi \quad (9)$$

5 “内匀外纬”模式的似水准椭球

第三种“似水准椭球”的模式为“内匀外纬”(见图 4)。“内匀外纬”模式是“匀质分层”模式和“整体纬向”模式的结合。

由文献[8]可知,设地幔平均密度为 $\rho_c = 4.658 \text{ gcm}^{-3}$,则由(3)式可算得地核椭球的匀质密度为 $\rho_i = 9.968 \text{ gcm}^{-3}$ 。“内匀外纬”模式的界面深度参数与“匀质分层”模式的相同, $n = 0.544 872$ 。

作为参数椭球的内椭球,地核椭球在地球椭球表面的引力为^[8]:

$$v_i = [(P_3^2 a^4 \cos^2 B + Q_3^2 b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{1/2} \quad (10)$$

式中:

$$P_3 = 2 G_i \frac{1+e^2}{e^3} (\arctane_c - \frac{e_c}{1+e_c^2}), Q_3 =$$

$$4 G_i \frac{1+e^2}{e^3} (e_c - \arctane_c)$$

$$2c = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)$$

$$e_c = \frac{bne}{\sqrt{n^2 b^2 + c}}$$

$$2 = (a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)$$

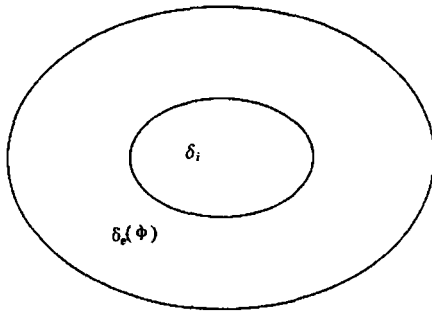


图 4 内匀外纬

Fig. 4 Inside density distributed along latitude

将 $\rho_i = 9.968$ 和 $n = 0.544872$ 代入上式, 便可求得匀质地核椭球在地球赤道 ($B = 0^\circ$) 与极点 ($B = 90^\circ$) 的引力分别为:

$$v_{\rho_i}^{\text{赤}} = 286.549965, v_{\rho_i}^{\text{极}} = 287.963478 \text{ cms}^{-2} \quad (11)$$

与(6)式相似, 设地幔极点和赤道的“纬向密度”分别为 ρ_p 和 ρ_e , 则地幔纬向密度的函数形式为^[8]:

$$\rho_e(\phi) = \rho_e(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi), \rho_e = \rho_p / \rho_e \quad (12)$$

为了求解(12)式中的 ρ_e 和 ρ_p 的数值, 以“准等位条件”约束椭球, 这时, 极点地幔重力的纬向密度积分公式为^[8]:

$$\frac{\rho_p - v_{\rho_i}^{\text{极}}}{2G} = \int_0^{\pi/2} \cos \sin [\rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, 0) + \rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, n)] d\phi + \int_0^{\pi/2} \cos \sin [\rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, 0)] d\phi, \quad (13)$$

其中: $n = \frac{2b(1+e^2)\cos^2 \phi}{1+e^2\cos^2 \phi}$

$$r_1 = \frac{a^2 \cos^2 \phi + a \sqrt{a^2 \cos^2 \phi - b^2(1-n^2)(1+e^2 \cos^2 \phi)}}{b(1+e^2 \cos^2 \phi)}$$

$$r_1 = \frac{a^2 \cos^2 \phi - a \sqrt{a^2 \cos^2 \phi - b^2(1-n^2)(1+e^2 \cos^2 \phi)}}{b(1+e^2 \cos^2 \phi)}$$

$$\rho_e(\phi, r) = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r + b \sin^2 \phi (1 - \cos^2 \phi) \times [\cos \ln(r^2 - 2br \cos \phi + b^2) + \frac{\cos 2\phi}{\sin \phi} \arctan \frac{r - b \cos \phi}{b \sin \phi}]$$

在“准等位条件”的约束下, 赤道地幔重力的纬向密度积分公式为^[8]:

$$\frac{\rho_e + a^2 - v_{\rho_i}^{\text{赤}}}{2G} = \int_0^{\pi/2} \cos \sin [\rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, 0) + \rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, n)] d\phi + \int_0^{\pi/2} \cos \sin [\rho_e(\phi, n) - \rho_e(\phi, 0)] d\phi,$$

$$\rho_e = 32.971932236798^\circ \quad (14)$$

式中: $n = \frac{2a \cos \phi}{1+e^2 \sin^2 \phi}, \sin^2 \phi = 0.499628$

$$r_1 = \frac{a \cos \phi + a \sqrt{a^2 \cos^2 \phi - (1-n^2)(1+e^2 \sin^2 \phi)}}{1+e^2 \sin^2 \phi}$$

$$r_1 = \frac{a \cos \phi - a \sqrt{a^2 \cos^2 \phi - (1-n^2)(1+e^2 \sin^2 \phi)}}{1+e^2 \sin^2 \phi}$$

$$\rho_e(\phi, r) = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r + a \sin^2 \phi (1 - \cos^2 \phi) \times [\cos \ln(r^2 - 2ar \cos \phi + a^2) + \frac{\cos 2\phi}{\sin \phi} \arctan \frac{r - a \cos \phi}{a \sin \phi}]$$

联立(13)、(14)两式并顾及(11), 便可求解出 ρ_e 和 ρ_p 的数值, 再代入(12)式, 则“内匀外纬”的“似水准椭球”的密度分布方式为:

$$\rho_e(\phi) = 4.650852 \cos^2 \phi + 4.666229 \sin^2 \phi \text{ gcm}^{-3} \quad (15)$$

其中: $n = 0.544872, \rho_i = 9.968 \text{ gcm}^{-3}$.

从形式上看, “内匀外纬”的“似水准椭球”, 应该比“匀质分层”和“整体纬向”的“似水准椭球”更接近地球的实际情况。

6 讨论

虽然“水准椭球非均匀的物质分布是一定存在的”, 但水准椭球非均匀的物质分布在数学上并不是惟一的。由哈密顿原理可知, 若 T 为系统的动能、 S 为系统的势能, 则 $L = T - S$ 为系统的拉格朗日函数, 如果系统从时间 t_1 到时间 t_2 , 相对系统的可能运动而言, 系统“真实”运动的哈密顿积分具有极小值, 即

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \min \quad (16)$$

本文给出的“似水准椭球”的3种密度分布方式, 只是“似水准椭球”内部密度的几种“可能分布”, 为了进一步了解这几种可能的密度分布方式的“真实性”, 应该对与这几种密度分布相对应的拉格朗日函数以及哈密顿积分进行深入的研究。

References

1 Moritz H(陈俊勇, 左传惠译). 地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学[M]. 北京: 测绘出版社, 1992, 92~107.

- 1 Moritz H. The figure of the earth—theoretical geodesy and the earth's Interior[M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping. 1992: 92 - 107. (in Chinese)
- 2 郝晓光. 对重力测量纬度改正概念的修正[J]. 地壳形变与地震, 1996, 16(3): 8 ~ 13.
- 2 Hao Xiaoguang. Modification of conception of latitude correction in gravity measurement[J]. Crustal Deformation and Earthquake, 1996, 16 (3): 8 - 13. (in Chinese)
- 3 郝晓光, 许厚泽, 刘大杰. 地球的重力聚点及参数椭球的地球重力学性质[J]. 测绘学报, 2000, 29(2): 109 ~ 113.
- 3 Hao Xiaoguang, Xu Houze and Liu Dajie. Gravity assembly points of the earth and gravitative features of the parameter ellipsoid[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000, 29(2): 109 - 113. (in Chinese)
- 4 郝晓光. 参数椭球表面的重力[J]. 地球科学, 1997, 22(2): 223 ~ 226.
- 4 Hao Xiaoguang. The gravity of parameter ellipsoid[J]. Earth Science, 1997, 22(2): 223 - 226. (in Chinese)
- 5 郝晓光, 刘大杰. 参数椭球的准等位条件[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, 32(1): 86 ~ 89.
- 5 Hao Xiaoguang and Liu Dajie. Quasi level condition of parameter ellipsoid[J]. Journal of Tongji University (Nature Science), 2004, 32 (1): 86 - 89. (in Chinese)
- 6 郝晓光, 许厚泽. 水准椭球的纬向密度分布[J]. 测绘学报, 1998, 27(4): 345 ~ 351.
- 6 Hao Xiaoguang and Hsu Houtze. Latitudinal normal density of the level ellipsoid[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(4): 345 - 251. (in Chinese)
- 7 郝晓光, 刘根友. 地球纬向正常密度函数系数的修正[J]. 大地测量与地球动力学, 2002, 22(2): 53 ~ 56.
- 7 Hao Xiaoguang and Liu Genyou. Modification of coefficient of the earth Latitudinal normal density function[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22 (2): 53 - 56. (in Chinese).
- 8 郝晓光, 刘根友. 地幔纬向正常密度函数[J]. 测绘学报, 2004, 33(2): 105 ~ 109.
- 8 Hao Xiaoguang and Liu Genyou. Latitudinal normal density function of mantle[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(2): 105 - 109. (in Chinese)

(上接第 44 页) 地球曲率的影响所致。本文仅是初步的正演分析结果, 为今后利用震前、震后的地表形变大地测量数据反演地下深部断层的错动状态和位错参数提供理论依据。最近的研究结果表明, 当利用不同的地球模型做反演时, 所反演的参数有很大区别(反演研究工作已经完成, 将另文刊出)。模拟计算表明, 利用分层球体模型可有效地反演出断层位错参数, 而球体均匀模型、半空间均匀模型反演的结果有较大差异, 尤其是确定地下断层的深度, 反演结果很不理想, 说明分层球体模型可以有效地进行同震地表变形的反演。

References

- 1 Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1985, 75: 1 135 - 1 154.
- 2 Okada Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1992, 82: 1 018 - 1 040.
- 3 Pollitz F. Postseismic relaxation theory on the spherical earth[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1992, 82: 422 - 453.
- 4 Pollitz F. Coseismic deformation from earthquake faulting on a layered spherical earth[J]. Geophys. J. Int., 1996, 125: 1 - 14.
- 5 Pollitz F. Gravitational viscoelastic postseismic relaxation on a layered spherical Earth [J]. J. Geophys. Res., 1997, 102: 17 921 - 17 941.
- 6 Sun W and Okubo S. Surface potential and gravity changes due to internal dislocation in a spherical Earth, I. Theory for a point dislocation [J]. Geophys. J. Int., 1993, 114: 569 - 592.
- 7 Sun W and S Okubo. Surface potential and gravity changes due to internal dislocation in a spherical Earth, II. Application to a finite fault[J]. Geophys. J. Int., 1998, 132: 79 - 88.
- 8 Pollitz F. Post-seismic relaxation theory on a laterally heterogeneous viscoelastic model[J]. Geophys. J. Int., 2003, 155: 57 - 78.
- 9 Sun W and S Okubo. Effects of earth's spherical curvature and radial heterogeneity in dislocation studies for a point dislocation[J]. Geophys. Res. Lett., 2002, 29: 46 - 49.
- 10 Cesca S, Vermeersen L and Sabadini R. Influence of lithospheric and mantle stratification on co- and post-seismic deformation due to finite faults[J]. Geophys. J. Int., 2000, 143: 575 - 581.
- 11 Zhao S, Muller R D, Takahashi Y, et al. 3-D finite-element modeling of deformation and stress associated with faulting: effect of inhomogeneous crustal structures[J]. Geophys. J. Int., 2004, 157: 629 - 644.
- 12 Pollitz F, B ürgmann R and Segall P. Joint estimation of afterslip rate and postseismic relaxation following the 1989 Loma Prieta earthquake [J]. J. Geophys. Res., 1998, 103: 26 975 - 26 992.