

参数椭球的密度分布研究

郝晓光, 刘根友

(中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室, 武汉 430077)

【摘要】继“参数椭球”概念提出以及“参数椭球”的地球重力学性质和数学性质得到初步研究之后, 本文研究了参数椭球的密度分布问题。结果表明, 当参数椭球内的密度界面无限趋向表面时, 两种“准等位条件”是完全等价的。在参数椭球的“准等位条件”下, 匀质分层的密度分布并不符合地球的实际密度分布。因此, 地球的密度分布与纬度密切相关。

【关键词】参数椭球; 准等位条件; 密度分布

【中图分类号】P208

【文献标识码】A

【文章编号】1009-2307(2004)02-0031-03

1 引言

在地球重力学的理论研究中, 分层椭球的重力问题一直没有得到应有的重视。针对这一问题, 本文作者等在最近几年进行了持续研究。1997 年提出“参数椭球”概念, 导出分层椭球带密度参数和界面深度参数的重力公式^[1]。2000 年提出“重力聚点”概念, 给出“密度分布定理”、“物质流动定理”和“重力聚点定理”^[2]。2001 年对参数椭球的数学性质进行了研究, 证明了参数椭球与麦克劳林(C. MacLaurin) 椭球的数学关系^[3]。

由于导出了分层椭球的重力与密度参数和界面深度参数的函数关系^[1], 这就使我们能够用解析的方法来研究地球的重力与密度和界面深度的对应关系。既然参数椭球是匀质分层的, 那么接下来的问题应该是: 地球是匀质分层的吗? 由于地球是一个旋转椭球。其密度分布与经度无关, 于是问题的另一种说法就是: 地球的密度分布与纬度相关吗?

2 准等位条件

不论是水准椭球还是匀质椭球, 其表面重力都只是纬度的函数且基本上可近似为纬度的线性函数。此外, 当分层椭球的密度分布发生变化时, 椭球表面的重力曲线只是围绕“重力聚点”旋转^[2]。所以, 对于密度分布不同的旋转椭球来说, 只要满足椭球极点和赤道两点的重力等位条件, 就能够近似满足椭球表面的重力等位条件。因此, 可把极点和赤道“两点等位条件”, 称为“准等位条件”。

先来求解“准等位条件一”。参数椭球表面重力为^[1]:

$$\bar{g} = (p - \frac{2}{3}e^2)xi + (p - \frac{2}{3}e^2)yi + Qzk$$

与匀质椭球表面重力公式^[4]不同, 参数椭球的 P 、 Q 不是常数, 而是纬度的函数若 P_e 、 Q_p 分别为参数椭球在赤道和极点的 P 、 Q 值, 则参数椭球极点重力 g_p 和赤道重力 g_e 为:

$$g_p = Q_p b, g_e = (P_e - \frac{2}{3}e^2)a$$

满足“准等位条件”, 参数椭球重力扁率必然等于水准椭球的重力扁率, p 、 e 分别为水准椭球极点和赤道重力, 则:

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{p - e^2}{e} \text{ 将上式代入得: } \frac{Q_p b}{(1 + \frac{2}{3}e^2)a} = (P_e - \frac{2}{3}e^2)a$$

参数椭球由两个分层匀质的相似旋转椭球组成。当参数椭球满足水准椭球极点和赤道的重力条件时, 称为“准等位条件一”, 将文献[3]中的 P_e 、 Q_p 代入上式并整理, 则参数椭球满足“准等位条件一”的内密度为:

$$i = \frac{0}{n^3} - \left(\frac{1-n^3}{n^3}\right) \frac{0 E_a - \frac{2e^3 n^3}{2 G(1+e^2)} - \frac{2b_0}{a(1+)} E b}{\frac{2b}{a(1+)} (n^3 E - E b) - (n^3 E - E a)} \quad (1)$$

a 、 b 为外椭球的长、短半轴, $a_n = na$ 、 $b_n = nb$ 为内椭球的长、短半轴, n 为界面深度参数, e 为外密度参数, i 为内密度参数, ω 为角速度, G 为万有引力常数, f 为水准椭球的重力扁率。

再来求解“准等位条件二”。参数椭球表面重力位为^[1]:

$$U = K - \frac{1}{2}(P - \frac{2}{3}e^2)(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}Qz^2$$

设参数椭球极点和赤道的重力位为 U_p 和 U_e , 令 $U_p = U_e$ 、满足“准等位条件”, 则

$$2(K_e - K_p) = P_e a^2 - Q_p b^2 - \frac{2}{3}e^2 a^2$$

满足水准椭球极点和赤道的重力位条件时, 称为“准等位条件二”, 将文献 [3] 中的 P_e 、 Q_p 、 K_p 、 K_e 代入上式并整理, 则参数椭球满足“准等位条件二”的内密度为:

$$i = \frac{0}{n^3} - \left(\frac{1-n^3}{n^3}\right) \frac{0 \left[2(\arctane \frac{a}{b} - \arctane \frac{b}{a}) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2} \right] + \frac{2e n^3}{2f}}{2(\arctane \frac{a}{b} - \arctane \frac{b}{a}) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2} + n^3 \left(\frac{E}{e^2} + \frac{2E}{e^2} \right)} \quad (2)$$

(1)、(2) 式中:

$$0 = \frac{3M}{4 a^2 b}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (3)$$

$$E = e - \arctan e, E = \arctan e - \frac{e}{1 + e^2} \quad (4)$$

$$E_b = e_b - \arctan e_b, E_a = \arctan e_a - \frac{e_a}{1 + e_a^2} \quad (5)$$

$$e_a = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_a}}, e_b = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}} \quad (6)$$

$$c_a = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)] \quad (7)$$

$$c_b = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)] \quad (8)$$

3 极限内密度

当参数椭球的界面无限趋向表面时，我们把内密度称为“极限内密度”。由文献 [3] 可知，“准等位条件二”的“极限内密度”等于麦克劳林密度 m 。为了求解“准等位条件一”的“极限内密度”，将 (1) 式改写为：

$$i = \frac{a}{n^3} + \frac{1}{n^3} [\int_0 E_a - \frac{2e^2 n^3}{2f(1+e^2)} - \frac{2b_0 E_b}{a(1+)}] A \quad (9)$$

$$\left. \frac{dB_a}{dn} \right|_{n=1} = \frac{4n(a^2 + b^2)(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2) + 8na^2 b^2 (1 - 2n^2)}{2 \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}} \Big|_{n=1} = 2b^2 - 2a^2$$

将上式代入 (13) 得：

$$\left. \frac{dc_a}{dn} \right|_{n=1} = -2a^2, \left. \frac{de_a}{dn} \right|_{n=1} = e(1 + e^2) \quad (14)$$

再由 (6)、(7)、(8) 式：

$$\frac{de_b}{dn} = \frac{nb^2 e^2}{2e_b} \frac{2c_b - n \frac{dc_b}{dn}}{(n^2 b^2 + c_b)^2}, \frac{dc_b}{dn} = \frac{1}{2} [\frac{dB_b}{dn} - 2n(a^2 + b^2)] \quad (15)$$

$$\text{式中：} B_b = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}$$

$$\left. \frac{dB_b}{dn} \right|_{n=1} =$$

$$\frac{4n(a^2 + b^2)(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2) + 8na^2 b^2 (1 - 2n^2)}{2 \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}} \Big|_{n=1} = 2a^2 - 2b^2$$

将上式代入 (15) 得：

$$\left. \frac{dc_b}{dn} \right|_{n=1} = -2b^2, \left. \frac{de_b}{dn} \right|_{n=1} = e \quad (16)$$

由 (5) 和 (14) 可得：

$$\frac{dE_a}{dn} = [\frac{1}{1 + e_a^2} - \frac{1 + e_a^2}{(1 + e_a^2)^2}] \frac{de_a}{dn}, \left. \frac{dE_a}{dn} \right|_{n=1} = \frac{2e^3}{1 + e^2} \quad (17)$$

由 (5) 和 (16) 可得：

$$\frac{dE_b}{dn} = (1 - \frac{1}{1 + e_b^2}) \frac{de_b}{dn}, \left. \frac{dE_b}{dn} \right|_{n=1} = \frac{e^3}{1 + e^2} \quad (18)$$

将 (17)、(18) 代入 (12) 得：

$$A(n \nabla 1) = [\frac{2b}{a(1+)} [E - \frac{e^3}{3(1+e^2)}] - [E - \frac{e^3}{3(1+e^2)}]]^{-1} \quad (19)$$

将上式代入 (9) 可得：

$$i(n \nabla 1) = \frac{a}{n^3} + \frac{1}{n^3} [\int_0 E_a - \frac{2e^2 n^3}{2G(1+e^2)} - \frac{2b_0 E_b}{a(1+)}] A(n \nabla 1) \quad (20)$$

$$A = A(n) = \frac{n^3 - 1}{a(1+)(n^3 E - E_b) - (n^3 E - E_a)} \quad (10)$$

由 (4) 至 (8) 式可得，当 $n=1$ 时，

$$e_a = e_b = e, c_a = c_b = 0, E_a = E, E_b = E \quad (11)$$

考察 (10) 和 (11) 可知： $A(n \nabla 1) = \frac{0}{0}$ ，采用“罗贝塔法则”求极限：

$$A(n \nabla 1) = \frac{3n^2}{\frac{2b}{a(1+)}(3n^2 E - \frac{dE_b}{dn}) - (3n^2 E) - \frac{dE_a}{dn}} \quad (12)$$

由 (6)、(7)、(8) 式：

$$\frac{de_a}{dn} = \frac{nb^2 e^2}{2e_a} \frac{2c_a - n \frac{dc_a}{dn}}{(n^2 b^2 + c_a)^2}, \frac{dc_a}{dn} = \frac{1}{2} [\frac{dB_a}{dn} - 2n(a^2 + b^2)] \quad (13)$$

$$\text{式中：} B_a = \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)}$$

将 1980 参考系统常数代入上式并顾及 (11)，可算得

$i(n \nabla 1)$ 的数值等于“麦克劳林密度” m 的数值，即

$i(n \nabla 1) = 7.100693(\text{g/cm}^3) = m$ 。由文献 [3] 可知，“准等位条件二”的“极限内密度”也等于“麦克劳林密度” m ：

$$i(n \nabla 1) = m = \frac{2e^3}{2G[(3+e^2)\arctan e - 3e]} = 7.100693(\text{g/cm}^3) \quad (21)$$

所以，在“极限内密度”的形式下，参数椭球的“准等位条件一”和“准等位条件二”是完全等价的。

4 讨论

参数椭球不满足等位条件但却能够满足“准等位条件”。由于水准椭球表面重力沿纬度的分布基本是线性的，所以可认为“准等位条件”是近似的等位条件。那么，满足“准等位条件”的“匀质分层椭球”有没有可能接近地球实际密度分布呢？

取“深度参数” n 从 0.4 到 0.9，由“准等位条件一”和“准等位条件二”的内密度函数 (1) 和 (2)，可计算出“准等位条件”的内密度分布曲线如图 1 所示。

由图 1 可见，“准等位条件一”的内密度函数和“准等

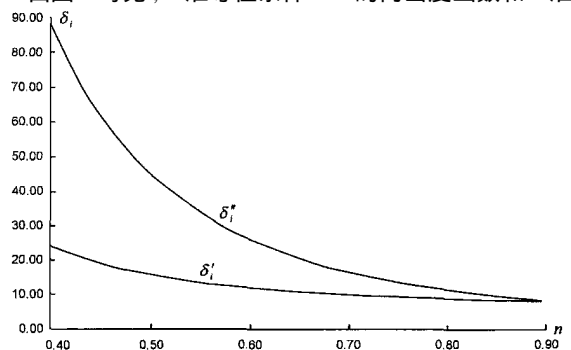


图 1 “准等位条件”的同密度分布曲线图

位条件二”的内密度函数并不是等价的，而当“深度参数”趋向 1 时，二者同时趋向“麦克劳林密度”。这说明只有在“极限内密度”的形式下，“准等位条件一”和“准等位条件二”才是等价的。

若将地壳并入地幔，把地球近似地分为地核和地幔两层。取地球平均半径为 6371、地核平均半径为 3473 (km)，可算得核幔边界的深度参数为 $n = 0.544872$ 。由于参数椭球的总质量是不变的，若再取地幔平均密度为 $\rho_m = 4.658$ (g/cm^3)，则由 n 和 ρ_m ，可算得地核平均密度为 $\rho_c = 9.968$ (g/cm^3)。

取 $n = 0.544872$ ，由 (1)、(2) 可算出： $\rho_i = 13.287$ 、 $\rho_e = 34.377$ (g/cm^3)，这与地核实际平均密度值 $\rho_c = 9.968$ (g/cm^3) 相差甚远。

以上结果表明，满足“准等位条件”的“匀质分层椭球”不可能接近地球实际的密度分布“匀质分层椭球”不可能是地球的实际密度分布。也就是说，地球的密度分布必定与纬度密切相关。本文的研究结果使得水准椭球的纬向密度成为一种数学必然，为研究地球的纬向密度^[5-8]找到了充分的理由。

参考文献

- [1] 郝晓光. 参数椭球表面的重力 [J]. 地球科学, 1997, 22 (2): 223-226.
- [2] 郝晓光, 许厚泽, 刘大杰. 地球的重力聚点及参数椭球的地球重力学性质 [J]. 测绘学报, 2000, 29 (2): 109-113.

- [3] 郝晓光, 许厚泽, 刘大杰. 参数椭球数学性质的初步研究 [J]. 测绘学报, 2001, 30 (3): 203-207.
- [4] 郝晓光. 对重力测量纬度改正概念的修正 [J]. 地壳形变与地震, 1996, 16 (3): 8-13.
- [5] 郝晓光, 许厚泽. 水准椭球的纬向密度分布 [J]. 测绘学报, 1998, 27 (4): 345-351.
- [6] 郝晓光, 许厚泽, 刘大杰. 地球的密度扁率与纬向正常密度假说 [J]. 中国科学 (D 辑), 2000, 30 (4): 436-441.
- [7] 郝晓光. 板块运动的纬向重力模式 [J]. 同济大学学报 (自然科学版), 2001, 29 (6): 653-656.
- [8] 郝晓光, 刘根友. 地球纬向正常密度函数系数的修正 [J]. 大地测量与地球动力学, 2002, 22 (2): 53-56.
- [9] 刘根友. 一种 GPS 测定姿态的新方法 [J]. 测绘科学, 2003, 28(3).



作者简介: 郝晓光 (1958 -), 男, 上海市人, 中国科学院测量与地球物理研究所高级工程师, 博士, 主要从事地球重力学研究。Email: hxg@asch.whigg.ac.cn

(上接 30 页)

表 2 中由新法所得的点 k 的点中误差所对应的位置基准点为 i , 方位基准为 $i-j$ 方向。若以点 202 为位置基准点, 以点 202, 105 为方位基准点, 得出点 201 的相对点中误差为 ± 0.921 mm., 其绝对值大于以 202-201 方向为方位基准的相应值 (0.900mm)。表中的旧法是先得出按附合导线平差所得的坐标协方差阵再求得两点间坐标差的协方差阵。此时的情况与首级网不同, 其协方差位置基准点并未变为点 i , 因在所得的坐标差协因数阵中, q_{x,x_k}, q_{y,y_k} 并不等于零。须再按式 (1) 来求得点 k 相对于点 i 的点中误差, 可见, 其所对应的协方差基准并不明确。文献 [1] 所提出的相对点位精度的计算公式显然亦不适用于附合网。由于篇幅所限, 仅取用了实测网中的一小部分, 且次级网是由首级网外推的图形强度不高的单导线, 遂使采用旧法所得的 201 及 202 两点的绝对和相对点中误差也都较大。实际情况并非总是如此。例如上海某县曾以多个三等城市三角点为起始点按全面网形式加密了四等三角网, 按旧法所得的四等点绝对点中误差都只有 1-2cm, 据此得到的相对点中误差自然也很小, 显然不是真实的精度估计。

参考文献

- [1] 刘大杰. 平面控制点的相对点位精度 [J]. 测绘学报, 1984, 13 (3): 182-191.

- [2] 施一民. 由协方差变换计算所需的相对点位精度的简捷公式 [J]. 同济大学学报, 1993, 21 (1): 107-115.
- [3] 付新启. 论相对精度及其计算方法 [J]. 测绘通报, 1999 (1): 9-11.
- [4] 施一民. 推广的半动态法及其在多级工程控制网中的应用 [J]. 解放军测绘学院学报, 1993, 10 (1).
- [5] 施一民. 推广的半动态法及其在多级工程控制网中的应用 [J]. 解放军测绘学院学报, 1993, 10 (1).
- [6] 施一民. 多级工程控制网相对点位精度的合理评定 [J]. 冶金测绘, 1993, 2 (3).



作者简介: 施一民 (1942 -), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为测量数据处理, 大地测量, 所著《现代大地控制测量》由教育部审定为“十五”国家级规划教材, 合作编著《全球定位系统 (GPS) 的原理与数据处理》等, 在国内外学术刊物上发表论文 80 余篇。

carrier-phase difference data processing are given in the paper. Finally, the actual data is processed by the method and the results and analyses are given.

Key words: Global position system; Global navigation satellite system; Carrier-phase difference

GAO Xing-wei, LI Yu-lin, GE Mao-rong (Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100039; Wuhan University, Wuhan 430079, China)

Inverse of the Mohorovicic's surface based on Airy-Hesikannen's isostatic model

Abstract: Consistent parameter of Airy-Hesikannen isostatic model of all kinds of terrains (including plains, hills, mountains with different heights and plateaus) leads to low accuracy of isostatic reduction in the calculation of gravity anomaly. Formulae of inverse of the Mohorovicic's surface were derived and numerical tests were made. According to the formulae, the parameter of isostatic model could be determined so as to improve the accuracy of calculating isostatic anomaly.

key words: Airy-Hesikannen; isostasy; Mohorovicic's surface

LI Shan-shan, WU Xiaoping, LI Jian-wei (Information Engineering University, Institute of Mapping and Surveying, Zhengzhou 450052, China)

On the rational evaluation of the relative precision of points

Abstract: The evaluation of the relative precision of a point by traditional methods is neither objective nor reliable. The first reason is that impacts of errors of initial data have not been taken into account; the second is the unconformity between the result and the practical purpose. As the reference datum for the precision, the datum for covariance presented by the author is not the same as the datum for coordinates. This theoretical concept possessed practicability, when it is applied to defining the absolute and the relative precision of a point. It is convenient to carry out transformation between the two different datums for covariance. A new method of the rational evaluation of the relative precision is put forward. The effectiveness of the method has been demonstrated by the application to a control network.

Key words: relative precision of point; datum for coordinates; datum for covariance

SHI Yi-min, ZHU Zi-yang (Department of Surveying, Tongji University, Shanghai 200092, China; Resource Department of Guangdong Province, Guangzhou 510500, China)

Study on density distribution of parameter ellipsoid

Abstract: After Parameter Ellipsoid concept has been presented, as well as its geophysical and mathematic characteristics have been preliminarily studied, we research the problem about density distribution of Parameter Ellipsoid in this paper. The results indicate: when the inner density interface extends to the Earth surface, these two quasi-equal level condition are completely equivalent. Under the condition of

quasi-equal level condition, density distribution of homogeneous layers are conflict with the real Earth density distribution. So the density of the Earth is related to latitude.

Key words: parameter ellipsoid; quasi-equal level condition; density distribution

HAO Xiao-guang, LIU Gen-you (Institute of Geodesy and Geophysics, Key Lab. Dynamical Geodesy, CAS, Wuhan 430077, China)

Annual vertical crustal displacements predicted from surface mass redistribution at GPS stations in China

Abstract: Annual vertical crustal displacements at 24 GPS stations in China are estimated from the global atmospheric, oceanic and hydrological mass redistributions. The amplitude variations of annual vertical motions at these stations are 5mm~10mm. A comparison is then performed for each station between the predicted results (from climatology) and the observed ones (by GPS), which reveals that there are generally good agreements in amplitude, but the phases of the predicted results are ahead one to two months to those of GPS approximately.

Key words: GPS; mass redistribution; vertical displacements

ZHANG Shi-yu, ZHONG Min, YAN Hao-ming, LU Yang (Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China)

The fictitious compress recuperation method of determining the earth's external gravity field

Abstract: Since Shen (1998, 2004a) put forward the fictitious compress recuperation of gravitational potential and proved the uniform convergence of the series solution (Shen 2004b), Shen et al. (2004) further put forward the fictitious compress recuperation of gravitational field. In the present paper, after pointing out that there exist drawbacks in Stokes' theory, Molodensky's theory, and Bjerhammar's theory, the fictitious compress recuperation of gravitational field will be investigated in a new view of point, and it will be proved that the series solution so determined is uniformly convergent. Furthermore, the fictitious compress recuperation of gravitational gradient field is put forward, and the height determination model is given.

Key words: geopotential; gravitational field; gravitational gradient field; fictitious compress recuperation

SHEN Wen-bin, NING Jir-sheng (The Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education China, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China)

Approximating statistics of stochastic variables after non-linear transformation with high-accuracy

Abstract: This paper first pointed out that the first step of the application of the Extended Kalman Filter in state estimation of non-linear systems is to make linearization to the system dynamic equations, which cause errors in state estimation. Then