

# 地幔纬向正常密度函数

郝晓光, 刘根友

(中国科学院 测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室, 湖北 武汉 430077)

## Latitudinal Normal Density Function of Mantle

HAO Xiao-guang, LIU Gen-you

(Key Laboratory of Dynamical Geodesy, IGG, CAS, Wuhan 430077, China)

**Abstract:** After presentation of 'Latitudinal normal density hypotheses of Earth' and 'Latitude depended gravity mode of Earth plate movement', this paper by means of parametric ellipsoid concept, using the mathematic method of deducing latitudinal normal Density function, assuming that Earth core having even density and Earth crust pushed into Earth mantel, the latitudinal normal density function of mantle is given out, which satisfies the pole and equator gravity condition. Therefore the latitudinal density anomaly of mantel would have theoretical bases.

**Key words:** mantel; latitudinal normal density; density anomaly

**摘要:** 继“地球纬向正常密度假说”和“板块运动纬向重力模式”的提出之后,以参数椭球为工具,应用求解“地球纬向正常密度函数”的数学方法,在假设地核为匀质椭球和地壳并入地幔的前提下,初步求解出满足极点与赤道重力条件的“地幔纬向正常密度函数”,从而使得“地幔纬向密度异常”的提法在理论上获得了依据。

**关键词:** 地幔; 纬向正常密度; 密度异常

## 1 引言

针对地幔物质流动的成因问题,笔者等按照地球重力学的方法进行了持续的研究,并初步得到了以下结果:1998年提出“纬向密度”概念,初步求解出整体地球的“纬向正常密度函数” $= (B)^{11}$ ;2000年提出“密度扁率”概念,进而提出“纬向正常密度假说”<sup>[2]</sup>;2001年给出了山脉隆升和盆地沉陷的“纬向密度异常”模型,进而提出板块运动的“纬向重力模式”<sup>[3]</sup>;2002年修正了地球纬向正常密度函数的系数<sup>[4]</sup>。

“纬向正常密度假说”及“板块运动纬向重力模式”的基本观点认为:地幔的纬向正常密度是按

“地幔纬向正常密度函数” $e(B)$ 规则分布的;如果地幔的纬向密度是正常分布的,其物质分布状态在水平方向就是稳定的;而如果地幔的纬向密度是异常分布的,其物质分布状态在水平方向就是不稳定的,与 $e(B)$ 不符的“地幔纬向密度异常” $e$ 就会引起水平方向的“纬向重力”。纬向重力总是把地幔物质从“地幔纬向密度异常高”( $e > 0$ )的地区推向“地幔纬向密度异常低”( $e < 0$ )的地区。在纬向重力的驱动下,地幔物质沿水平方向发生迁移和调整,最终达到地幔纬向密度的正常分布状态 $e = 0$ 。

板块运动纬向重力模式<sup>[3]</sup>将地壳圈物质的垂直运动与地幔物质的水平运动结合在一起,这

收稿日期: 2002-07-12; 修回日期: 2003-12-12

基金项目: 中国科学院知识创新资助项目(KZCX2-106)

作者简介: 郝晓光(1958-),男,上海人,高级工程师,博士,博士后,主要从事地球重力学研究。

和地质学中的盆山耦合关系<sup>[5-7]</sup>所指出的地质事实是基本一致的。“尽管地质学家们没有进一步指出这种物质运动的驱动力,但是,指出地质实践要求存在这类形式的物质运动本身,就为进一步的探索指出了方向”<sup>[8]</sup>。

地球重力学中的“重力异常”是相对“正常重力”而言的。所以,用于研究板块运动动力问题的地幔纬向密度异常  $\sigma_e$  也应该是相对地幔纬向正常密度  $\sigma_e(B)$  而言的;也就是说,在求解  $\sigma_e$  之前,先应求解出  $\sigma_e(B)$ 。

### 2 匀质地核椭球在赤道与极点的引力

地球和地核的平均半径为 6 371 km 和 3 473 km,  $a, b$  为椭球的长、短半轴,若将地壳并入地幔,则核幔边界的深度参数  $n$  可由下式确定

$$\left. \begin{aligned} \frac{(a - an) + (b - bn)}{2} &= 6\,371 - 3\,473 \\ n &= 0.544\,872 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设地幔的平均密度为  $\rho_e = 4.658 \text{ g/cm}^3$ , 地球平均密度  $\rho_0 = 5.517 \text{ g/cm}^3$ , 则由参数椭球理论<sup>[9-11]</sup>可知,地核椭球的匀质密度为

$$\rho_i = \frac{1}{n^3}(\rho_0 - \rho_e) + \rho_e = 9.968 \text{ g/cm}^3 \quad (2)$$

作为参数椭球的内椭球,地核椭球在外椭球表面的引力为

$$v_i = [(P_3^2 a^4 \cos^2 B + Q_3^2 b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

式中,  $B$  为大地纬度。

将  $\rho_i = 9.968$  和  $n = 0.544\,872$  代入上式( $P_3$  与  $Q_3$  的表达式参见文献[11]),便可求得匀质地核椭球在地球椭球赤道与极点处的引力分别为

$$\left. \begin{aligned} v_i^{\text{赤}} &= 286.549\,965 \text{ cm/s}^2 \\ v_i^{\text{极}} &= 287.963\,478 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 3 地幔纬向正常密度函数

由纬向密度的定义可知,“地球纬向密度”为某纬度“地表至地心向径的垂直平均密度”。文献[4]求解出整体地球的“纬向正常密度函数”为

$$\begin{aligned} \sigma(B) &= \sqrt{{}_E^2 \cos^2 B + {}_P^2 \sin^2 B} \\ &= \sqrt{5.496\,247^2 \cos^2 B + 5.539\,862^2 \sin^2 B} \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $E$  和  $P$  为地球赤道与极点的纬向正常密度。

同理,设“地幔纬向密度”为某纬度“壳幔边界至核幔边界向径的垂直平均密度”,参照式(5),则地幔的纬向正常密度函数可表示为

$$\sigma_e(B) = \sqrt{{}_E^2 \cos^2 B + {}_P^2 \sin^2 B} \quad (6)$$

式中的待定常数  $E$  与  $P$  为地幔的赤道与极点的纬向正常密度。

为了求解式(6)中的待定常数  $E$  与  $P$ ,设理想的地幔模式为地核为匀质椭球,并将地壳并入地幔之中,则有  $\rho_i = \rho_e, \sigma_e = \sigma_e(B)$ 。

### 4 地幔极点重力纬向密度积分公式

采用“极原点坐标系”(图1),  $r$  为以南极点为坐标原点的向径,  $\theta$  为极距,  $\psi$  为经度,地球椭球面方程  $r_0$  和地核椭球面方程  $r_1$  的表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{2b(1+e^2)\cos\theta}{1+e^2\cos^2\theta} \\ \left(\frac{1+e^2\cos^2\theta}{a^2}\right)r_1^2 - \frac{2\cos\theta}{b}r_1 + (1-n^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

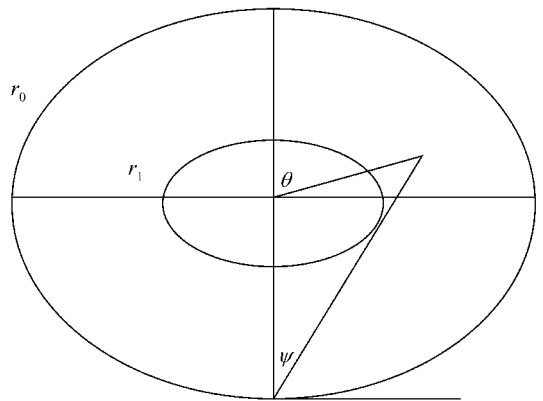


图 1 极原点坐标系

Fig. 1 Polar coordinate system

见图1,地核椭球面方程  $r_1$  有 2 个解

$$r_1(r_1) = \frac{a^2 \cos\theta \pm a \sqrt{a^2 \cos^2\theta - b^2(1-n^2)(1+e^2 \cos^2\theta)}}{b(1+e^2 \cos^2\theta)} \quad (8)$$

过原点作直线与  $r_1$  相切,以切点为界,  $r_1$  为  $r_1$  的上部,  $r_1$  为  $r_1$  的下部。因切点处  $r_1 = r_1$ , 故切线的极距  $r_1$  可由下式计算为

$$\left. \begin{aligned} (1+e^2 \cos^2\theta) \cos^2\theta &= 1-n^2 \\ r_1 &= 33\,06\,14 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

采用水准椭球的极点重力与匀质地核椭球在极点的引力的差值  $\rho - v_i^{\text{极}}$  为约束条件,则理想

地幔模式在地球椭球表面极点处的重力为

$$\begin{aligned}
 p - v_i^{\text{极}} &= G \int_0^1 e \frac{r \cos \theta}{r^3} d\theta \\
 &= G \int_0^1 \frac{e \cos \theta}{r^2} d\theta \int_0^{r_1} r_0 dr \quad (10)
 \end{aligned}$$

参见图 1, 以切点为界, 则  $r_1 > r_1$ , 式(10)可改写为

$$\frac{p - v_i^{\text{极}}}{2G} = \int_0^1 e \cos \theta \sin \theta d\theta \left[ \int_0^{r_1} \frac{r_0}{r^2} dr + \int_0^{r_1} \frac{r_0}{r^2} dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{r_0} \frac{r_0}{r^2} dr \right] \quad (11)$$

为求积分之便, 将纬度  $\theta$  转换成地心纬度的余角  $\phi$ , 则式(6)可近似为

$$\begin{aligned}
 e &= e(\phi) = E \sin^2 \phi + P \cos^2 \phi \\
 &= E (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中,  $P = P/E$ 。

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \phi &= \frac{(r \cos \theta - b)^2}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \\
 \sin^2 \phi &= \frac{(r \sin \theta)^2}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 e &= E \frac{(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r^2 - (2b \cos \theta) r + b^2}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \\
 &= E_1(\phi, r) \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{p - v_i^{\text{极}}}{2G} &= E \left\{ \int_0^1 \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{r_1} E_1(\phi, r) dr + \int_0^1 \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{r_1} E_1(\phi, r) dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{r_0} E_1(\phi, r) dr \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

对式(13)求不定积分

$$\begin{aligned}
 \int E_1(\phi, r) dr &= (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) r + b \sin^2 \phi (1 - \cos^2 \phi) [\cos \theta \ln(r^2 - 2br \cos \theta + b^2) + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \arctan \frac{r - b \cos \theta}{b \sin \theta}] \quad (15)
 \end{aligned}$$

应用式(15), 式(14)变为

$$\frac{p - v_i^{\text{极}}}{2G} = E \left\{ \int_0^1 \cos \theta \sin \theta d\theta [ \int_{r_1}^{\text{极}(\phi, r_1)} E_1(\phi, r) dr - \int_{r_1}^{\text{极}(\phi, 0)} E_1(\phi, r) dr + \int_{r_0}^{\text{极}(\phi, r_0)} E_1(\phi, r) dr ] \right\} \quad (16)$$

以上就是地幔的“极点重力纬向密度积分公式”。

### 5 地幔赤道重力纬向密度积分公式

地幔极点重力纬向密度积分公式(16)中有 2 个未知数  $E$  和  $P$ , 所以我们还需求解地幔赤道重力纬向密度积分公式。推导地幔赤道重力纬向密度积分公式时, 采用赤道原点坐标系(图 2),  $r$  为以赤道点为坐标原点的向径,  $r_0$  为极距,  $\theta$  为围绕极轴的旋转角, 地球椭球面方程  $r_0$  和地核椭球面方程  $r_1$  的表达式分别为

$$\begin{cases} r_0 = \frac{2a \cos \theta}{1 + e^2 \sin^2 \theta} \\ 1 + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{a^2} r_1^2 - \frac{2 \cos \theta}{a} r_1 + (1 - n^2) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

见图 2, 地核椭球面方程  $r_1$  有 2 个解

$$r_1(r_1) = \frac{a \cos \theta \pm a \sqrt{\cos^2 \theta - (1 - n^2)(1 + e^2 \sin^2 \theta)}}{1 + e^2 \sin^2 \theta} \quad (18)$$

由式(17)、式(18)可见,  $r_0$ 、 $r_1$  和  $r_1$  随  $\theta$  的变化仅产生微小变化, 故取其变化值的中数  $\bar{r}_1$ ,  $\sin^2 \theta = \sin^2 \bar{\theta}$ 。

见图 2, 过原点作直线与  $r_1$  相切, 切点处  $r_1 = r_1$ , 切线极距  $r_2$  满足

$$n^2 = \sin^2 \theta [1 + (1 - n^2) e^2 \sin^2 \theta] \quad (19)$$

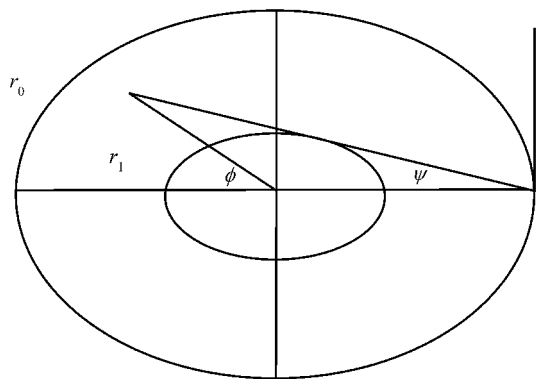


图 2 赤道原点坐标系

Fig. 2 Equator coordinate system

地幔的赤道重力纬向密度积分公式采用水准椭球的赤道重力与匀质地核椭球在赤道的引力的差值为约束条件,其表达式为

$$g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}} = G \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \frac{\rho \cos \theta}{r^3} dr = G \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \rho \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \frac{1}{r^3} dr$$

由于  $r_0, r_1$  和  $r_1$  中已不含变量  $\theta$ ,故上式可改写为

$$\frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}}{2G} = \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \rho \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr \quad (20)$$

参见图 2,以切点为界,则  $r_1 > r_1$ ,故式(20)可改写为

$$\frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}}{2G} = \int_0^{\frac{r_1}{r_1}} \rho \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{r_1} \frac{1}{r^3} dr + \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \rho \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr \quad (21)$$

为了确定  $\rho$ ,令  $\theta = 0$ ,则式(21)变为

$$\frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}(\theta = 0)}{2G} = \int_0^{\frac{r_1}{r_1}} \rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{r_1} \frac{1}{r^3} dr + \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr \quad (22)$$

式中,  $\rho_0$  为匀质椭球密度,  $g_e$  为匀质椭球赤道重力,  $v_i^{\text{赤}}(\theta = 0)$  为以  $\rho_0$  为匀质密度的地核椭球在赤道的引力,3 者均为已知常数。将式(22)与式(19)联立,采用数值积分方法可算出  $\sin^2 \theta = 0.499628, \theta = 32^\circ 58' 19''$ 。

在图 2 中,  $\theta$  为地心纬度,故式(12)可改写为

$$g_e(\theta) = E(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad (23)$$

$$g_e = E \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r^2 - (2a \cos \theta) r + a^2}{r^2 - (2a \cos \theta) r + a^2} = E \cdot 2(\theta, r) \quad (24)$$

$$\frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}}{2G} = E \left\{ \int_0^{\frac{r_1}{r_1}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr + \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr \right.$$

$$\left. \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r^3} dr \right\} \quad (25)$$

对式(24)求不定积分

$$g_e(\theta, r) = 2(\theta, r) dr = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r + a \sin^2 \theta (r - 1) [\cos \theta \ln(r^2 - 2a \cos \theta r + a^2) + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \arctan \frac{r - a \cos \theta}{a \sin \theta}] \quad (26)$$

应用式(26),则式(25)变为

$$\frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}}{2G} = E \left\{ \int_0^{\frac{r_1}{r_1}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta [g_e(\theta, r_1) - g_e(\theta, 0) + g_e(\theta, r_0) - g_e(\theta, r_1)] d\theta + \int_0^{\frac{r_0}{r_1}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta [g_e(\theta, r_0) - g_e(\theta, 0)] d\theta \right\} \quad (27)$$

以上就是地幔的赤道重力纬向密度积分公式。

### 6 求解待定常数

为行文之便,将地幔极点重力纬向密度积分公式(16)和地幔赤道重力纬向密度积分公式(27)表达为

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_p - v_i^{\text{极}}}{2G} &= E f_{\text{极}}(\theta) \\ \frac{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}}{2G} &= E f_{\text{赤}}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

消去  $E$  后可得

$$\frac{g_p - v_i^{\text{极}}}{g_e + a^2 - v_i^{\text{赤}}} = \frac{f_{\text{极}}(\theta)}{f_{\text{赤}}(\theta)} \quad (29)$$

式中只有一个未知数  $\theta$ ,故可采用数值积分方法计算得  $\theta = 1.00330639$ ,代入式(28)可算得  $E = 4.650852$  及  $\rho = E = 4.666229 \text{ g/cm}^3$ 。于是,由式(23)和式(6),“地幔纬向正常密度函数”为

$$g_e(\theta) = 4.650852 \cos^2 \theta + 4.666229 \sin^2 \theta \quad (30)$$

$$g_e(B) = 4.650852^2 \cos^2 B + 4.666229^2 \sin^2 B \quad (31)$$

数值验算表明,以上 2 式差别不大。在求解待定常数的计算过程中,常数  $a, b, \rho, g_e$  采用 1980 大地参考系统的数值,  $v_i^{\text{赤}}$  与  $v_i^{\text{极}}$  的数值由式(4)给出。

## 7 讨 论

在得到地幔纬向正常密度的分布函数  $\rho_e(B)$  之后,如果能够直接测量到地幔实际纬向密度,便可由“异常”=“实际”-“正常”的关系,得到可能用于定量研究板块运动动力问题的地幔纬向密度异常  $\rho_e$ 。但是,由纬向密度定义可知,地幔实际纬向密度是某纬度壳幔边界至核幔边界向径的垂直平均密度。由于地表以下的垂直平均密度无法直接测量,所以纬向密度不是一个“直接量”,而是一个“间接量”。然而,在地球重力学中,大地水准面差距由可直接测量的重力间接解算出来的。重力求解大地水准面差距的“布隆斯公式”是由德国的天文学家布隆斯(H. Bruns)于 1878 年建立的。借鉴重力求解大地水准面异常的思路,进一步的工作应推导出重力求解地幔纬向密度及纬向密度异常的数学公式,并对重力反演的不适应性进行约束,从而使得地球重力学对板块运动动力问题的定量研究成为可能。

## 参考文献:

- [1] HAO Xiao-guang, XU Hourze. Latitudinal Normal Density of the Level Ellipsoid[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(4):345-351.
- [2] HAO Xiao-guang, XU Hourze, LIU Da-jie. Earth's Density Flattening and Hypothesis of Latitudinal Normal Density[J]. Science in China (Series D), 2000, 30(4):436-441.
- [3] HAO Xiao-guang. Latitudinal Gravity Mode of Plate Movement[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2001, 29(6):653-656.
- [4] HAO Xiao-guang, LIU Gen-you. Modification of Coefficient of the Earth Latitudinal Normal Density Function[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(2):53-56.
- [5] LI Si-guang. Outline of Geomechanics[M]. Beijing: Science Press, 1973. 10-11.
- [6] LIANG Yuan-bo. Seabed Tectonics[M]. Beijing: Science Press, 1983. 79-119.
- [7] BAI Wei-ji, HU Xufeng, YANG Jing-sui, et al. No Relationship between Mountain Building and Collision for Plate Tectonics[J]. Geological Review, 1993, 39(2):111-116.
- [8] CHI Shun-liang, LUO Ming-jin. Origin of Ocean and Continent[M]. Beijing: Seismological Press, 2002. 48-49.
- [9] HAO Xiao-guang. The Gravity of Parameter Ellipsoid[J]. Earth Science—Journal of China University of Geosciences, 1997, 22(2):223-226.
- [10] HAO Xiao-guang, XU Hourze, LIU Da-jie. Gravity Assembly Points of the Earth and Gravitative Features of the Parameter Ellipsoid[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000, 29(2):109-113.
- [11] HAO Xiao-guang, XU Hourze, LIU Da-jie. The Preliminary Study of Mathematical Properties of the Parameter Ellipsoid[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2001, 30(3):203-207.

## 《测绘学报》刊出论文荣获首届中国科协期刊优秀学术论文奖

为促进我国学科发展、科技进步、人才成长,充分调动科技人员的积极性,进一步提高学术论文质量,中国科协举办了第一届优秀学术论文评选活动。第一届中国科协期刊优秀学术论文评选活动是由中国科协所属全国性学会、协会、研究会主办的学术期刊编辑部和三名同行专家个人推荐,刊物主办学会组织专家对推荐的论文进行初审后上报中国科协,经中国科协期刊优秀学术论文专家评审委员会无记名投票评选和中国科协学术交流工作委员会审定后评选出的。首届中国科协期刊优秀学术论文共评选出 99 篇,并在中国科协网上进行了 14 天的公示。

根据中国科协的精神,中国测绘学会和《测绘学报》编辑部组织有关专家对 1998 年~2002 年《测绘学报》刊出的论文进行了认真的评审,最后评选出 1998 年第 1 期刊出的,陈俊勇、刘经南等人撰写的“分布式广域差分 GPS 实时定位系统”一文,作为中国测绘学会优秀学术论文上报中国科协。经中国科协评选、审定等程序,该篇论文荣获第一届中国科协期刊优秀学术论文奖。

今年 2 月 10 日召开的中国科协六届四次全委会议的闭幕式上颁发了“第一届中国科协学术期刊优秀学术论文奖”,并对刊物主办学会和学报编辑部颁发了荣誉证书。