参数椭球的准等位条件

郝晓光[1,2],刘大杰[2]

(1. 中国科学院 测量与地球物理研究所,湖北 武汉 430077; 2. 同济大学 测量与国土信息工程系,上海 200092)

摘要: 对参数椭球的等位性进行了深入研究.结果表明,参数椭球的准等位条件是成立的,但参数椭球的等位条件是不成立的;在等位条件下,参数椭球的密度分布必将呈现纬向分布状态.这样就将不久前提出的"参数椭球"与"纬向密度"联系在了一起,使得水准椭球的纬向密度成为一种数学必然,为研究地球的纬向密度及纬向密度异常找到了充分的理由.

关键词: 参数椭球; 准等位条件; 纬向密度

中图分类号: P 312 **文献标识码**: A **文章编号**: 0253 - 374X(2004)01 - 0086 - 04

Quasi Level Condition of Parameter Ellipsoid

HAO Xiao-guang[1,2], *LIU Da-jie*[2]

(1. Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica, Wuhan 430077, China;
2. Department of Surveying and Geomatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper gives a further study on level characteristics of parameter ellipsoid. The results indicate that the quasi level condition of parameter ellipsoid exists in fact, but has not strict level condition. On the condition of this, the density distribution must be along latitude. This conclusion makes it clear that there is mathematic relationship between parameter ellipsoid and latitudinal density, and we have full reasons to do research on latitudinal density and latitudinal density anomaly.

Key words: parameter ellipsoid; quasi level condition; latitudinal density

研究"分层旋转椭球"的引力问题,在地球重力学中有重要意义.文献[1]推导出带密度参数和界面深度参数的重力公式,提出了"参数椭球"的概念;文献[2]研究了参数椭球的地球重力学性质,发现了"重力聚点",给出了参数椭球的"密度分布定理"、"物质流动定理"和"重力聚点定理";文献[3]对参数椭球的数学性质进行了研究,证明在极点和赤道重力位相等的约束条件下,当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球的内椭球趋向麦克劳林(C. MacLaurin)椭球.

文献[4]初步求解出水准椭球的纬向密度函数,提出了"纬向密度"概念;文献[5]初步计算出地球的"密度扁率",提出了"纬向正常密度假说";文献[6]给出了山脉隆升和盆地沉陷的"纬向密度异常"模型,提出了板块运动的"纬向重力模式".

文献[1~3]初步提出了地球重力学的参数椭球理论,文献[4~6]初步提出了地球重力学的纬向密度理论.那么"参数椭球"和"纬向密度"这 2 种初步

收稿日期: 2002 - 12 - 03
基金项目: 中国科学院院长基金资助项目;同济大学博士后基金资助项目;中国科学院知识创新资助项目(KZCX2 - 106)
作者简介: 郝晓光(1958 -),男,上海人,高级工程师,理学博士.E-mail:hxg@asch.whigg.ac.cn

提出的理论在地球重力学中有何种联系？本文的研究表明,参数椭球的“准等位条件”是成立的,但参数椭球的等位条件是不成立的;在等位条件下,参数椭球的密度分布必将呈现纬向分布状态;“匀质分层的水准椭球”是不存在的,水准椭球的密度分布与纬度密切相关.这样就将“参数椭球”与“纬向密度”联系在了一起.

1　准等位条件一

如果一个椭球表面的重力位处处相等,这个椭球就满足等位条件.定义如果一个椭球赤道和极点的重力位相等,那么这个椭球就满足“准等位条件”.先来求解参数椭球的“准等位条件”.由文献[1]可知,参数椭球表面重力为

$$\boldsymbol{g} = (P-\omega^2)x\boldsymbol{i} + (P-\omega^2)y\boldsymbol{j} + Qz\boldsymbol{k} \tag{1}$$

与匀质椭球不同,参数椭球的 P,Q 为纬度的函数,若 P_e,Q_p 分别为参数椭球在赤道、极点的 P,Q 值,则参数椭球极点重力 g_p 和赤道重力 g_e 为

$$g_p = Q_p b,\quad g_e = (P_e-\omega^2)a \tag{2}$$

式中:a,b 分别为椭球的长、短半轴;ω 为角速度.

若参数椭球满足“准等位条件”,其重力扁率必然等于水准椭球的重力扁率,则

$$\frac{g_p-g_e}{g_e} = \frac{Q_p b-(P_e-\omega^2)a}{(P_e-\omega^2)a} = \frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e} = \beta,$$

即

$$\frac{Q_p b}{(1+\beta)} = (P_e-\omega^2)a \tag{3}$$

以上就是参数椭球“准等位条件”,γ_p 和 γ_e 为水准椭球极点和赤道的重力,式中 P_e,Q_p 由文献[3]给出.

令 f 为万有引力常数;δ_e,n 分别为参数椭球的密度参数和界面深度参数;δ_0 为匀质椭球的密度;$e^2=(a^2-b^2)/a^2$,$e'^2=(a^2-b^2)/b^2$.并令

$$\begin{cases} E' = e' - \operatorname{arctg} e',\ E'' = \operatorname{arctg} e' - \dfrac{e'}{1+e'^2} \\ E'_b = e''_b - \operatorname{arctg} e''_b,\ E''_a = \operatorname{arctg} e''_a - \dfrac{e''_a}{1+e''^2_a} \end{cases} \tag{4}$$

式中:e''_a,e''_b 由文献[3]给出

将 P_e 和 Q_p 代入式(3)可得

$$\frac{4\pi fb}{(1+\beta)}\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}[(\delta_0-\delta_e)E'_b + n^3\delta_eE'] = 2\pi fa\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}[(\delta_0-\delta_e)E''_a + n^3\delta_eE''] - \omega^2a$$

即:

$$\delta_e = \frac{\delta_0E''_a - \dfrac{\omega^2e'^3n^3}{2\pi f(1+e'^2)} - \dfrac{2b\delta_0}{a(1+\beta)}E'_b}{\dfrac{2b}{a(1+\beta)}(n^3E'-E'_b) - (n^3E''-E''_a)} = \delta_e(n) \tag{5}$$

由式(5)可见,参数椭球的“准等位条件”在参数椭球的密度参数 δ_e 和界面深度参数 n 之间构成了函数关系,使得参数椭球的双参数变成了单参数.

2　准等位条件二

由文献[1]可知,参数椭球表面的重力位为

$$U = K - (P-\omega^2)(x^2+y^2)/2 - Qz^2/2 \tag{6}$$

式中:P,Q,K 均为纬度的函数.设参数椭球极点和赤道的重力位为 U_p 和 U_e,令 $U_p=U_e$,满足“准等位条件”,于是

$$2(K_e-K_p) = P_ea^2 - Q_pb^2 - \omega^2a^2 \tag{7}$$

式中:K_e 和 K_p 为参数椭球在赤道和极点的 K 值.

$$K_p = 2\pi f\frac{a^2}{e'n^3}[(\delta_0-\delta_e)\operatorname{arctg} e''_b + n^3\delta_e\operatorname{arctg} e']$$

$$K_e = 2\pi f\frac{a^2}{e'n^3}[(\delta_0-\delta_e)\operatorname{arctg} e''_a + n^3\delta_e\operatorname{arctg} e']$$

将参数椭球极点和赤道的 P,Q,K 值代入式(7)得

$$4\pi f\frac{a^2}{e'n^3}(\delta_0-\delta_e)(\operatorname{arctg} e''_a - \operatorname{arctg} e''_b) + \omega^2a^2 = 2\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}a^2[(\delta_0-\delta_e)E''_a + n^3\delta_eE''] - 4\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}b^2[(\delta_0-\delta_e)E'_b + n^3\delta_eE']$$

整理得

$$\delta_e = \frac{\delta_0\left[2(\operatorname{arctg} e''_a - \operatorname{arctg} e''_b) - \dfrac{E''_a}{e^2} + \dfrac{2E'_b}{e'^2}\right] + \dfrac{\omega^2e'n^3}{2\pi f}}{2(\operatorname{arctg} e''_a - \operatorname{arctg} e''_b) - \dfrac{E''_a}{e^2} + \dfrac{2E'_b}{e'^2} + n^3\left(\dfrac{E''}{e^2} + \dfrac{2E'}{e'^2}\right)} = \delta_e(n) \tag{8}$$

3 等位条件一

式(5)和式(8)这2个“准等位条件”的成立,使人很自然地产生出求解参数椭球等位条件的想法.已知参数椭球表面的单位法向矢量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{a^4}+\frac{z^2}{b^4}}}\left(\frac{x}{a^2}\boldsymbol{i}+\frac{y}{a^2}\boldsymbol{j}+\frac{z}{b^2}\boldsymbol{k}\right)$$

由式(1),若参数椭球表面为重力等位面,则必有其表面重力在椭球表面的切向分量为零,即 $\boldsymbol{g}/\!/\boldsymbol{n}$,故参数椭球的等位条件为

$$\frac{x/a^2}{(P-\omega^2)x}=\frac{y/a^2}{(P-\omega^2)y}=\frac{z/b^2}{Qz},$$

即
$$P-\frac{Q}{1+e'^2}=\omega^2 \tag{9}$$

式中: $P=2\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}[(\delta_0-\delta_e)E''_c+n^3\delta_eE'']$, $Q=4\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3n^3}[(\delta_0-\delta_e)E'_c+n^3\delta_eE']$, $E''_c=\operatorname{arctg}e''_c-\frac{e''_c}{1+e''^2_c}$, $e''_c=\frac{nbe'}{\sqrt{n^2b^2+c}}$, $c=\frac{1}{2}\{[(n^2a^2+n^2b^2-\rho^2)^2+4n^2a^2b^2(1-n^2)]^{1/2}-(n^2a^2+n^2b^2-\rho^2)\}$, $\rho=[(a^4\cos^2B+b^4\sin^2B)/(a^2\cos^2B+b^2\sin^2B)]^{1/2}$; $E'_c=e''_c-\operatorname{arctg}e''_c$. 将 P,Q 代入式(9)可得

$$2\pi f\frac{(1+e'^2)^2}{e'^3}\left[\frac{\left(\delta_0-\delta_e\right)}{n^3}\left(\operatorname{arctg}e''_c\frac{e''_c}{1+e''_c}\right)+\delta_e\left(\operatorname{arctg}e'-\frac{e'}{1+e'^2}\right)\right]=$$
$$4\pi f\frac{1+e'^2}{e'^3}\left[\frac{(\delta_0-\delta_e)}{n^3}(e''_c-\operatorname{arctg}e''_c)+\delta_e(e'-\operatorname{arctg}e')\right]+(1+e'^2)\omega^2$$

即: $(1+e'^2)[(\delta_0-\delta_e)e''_c+n^3\delta_eE'']=$
$$2[(\delta_0-\delta_e)E'_c+n^3\delta_eE']+\frac{\omega^2e'^3n^3}{2\pi f}$$

整理得 $\delta_e=$

$$\frac{\frac{\omega^2e'^3n^3}{2\pi f}-\delta_0[(1+e'^2)E''_c-2E'_c]}{(1+e'^2)(n^3E''-E''_c)-2(n^3E'-E'_c)}=\delta_e(n,B) \tag{10}$$

4 等位条件二

参照式(6),由纬度表示的参数椭球表面的重力位公式为

$$U=K-\frac{1}{2}(P-\omega^2)a^2+\frac{1}{2}\frac{[(P-\omega^2)a^2-Qb^2]b^2\sin^2B}{a^2\cos^2B+b^2\sin^2B} \tag{11}$$

水准椭球表面重力位的公式为[7]

$$U_0=\frac{fM}{be'}\operatorname{arctg}e'+\frac{\omega^2a^2}{3} \tag{12}$$

令 $U=U_0$,满足等位条件,则有

$$K-\frac{1}{2}(P-\omega^2)a^2+\frac{1}{2}\frac{[(P-\omega^2)a^2-Qb^2]b^2\sin^2B}{a^2\cos^2B+b^2\sin^2B}=\frac{fM}{be'}\operatorname{arctg}e'+\frac{\omega^2a^2}{3} \tag{13}$$

令 $B_1=\frac{b^2\sin^2B}{a^2\cos^2B+b^2\sin^2B}$,则式(13)可表达为

$$K-\frac{1}{2}(P-\omega^2)a^2+\frac{1}{2}(P-\omega^2)a^2B_1-\frac{1}{2}Qb^2B_1=U_0 \tag{14}$$

式中: $K=2\pi f\frac{a^2}{e'n^3}[(\delta_0-\delta_e)\operatorname{arctg}e''_c+n^3\delta_e\cdot\operatorname{arctg}e']$.

若令 $B_2=1-B_1$,并将 P,Q,K 代入式(14)可得

$$2[(\delta_0-\delta_e)\operatorname{arctg}e''_c+n^3\delta_e\operatorname{arctg}e']-\frac{B_2}{e^2}[(\delta_0-\delta_e)E''_c+n^3\delta_eE'']-\frac{2B_1}{e'^2}[(\delta_0-\delta_e)E'_c+n^3\delta_eE']=\frac{e'n^3(2U_0-B_2\omega^2a^2)}{2\pi fa^2}$$

即 $\delta_e=$

$$\left[\frac{e'n^3(2U_0-B_2\omega^2a^2)}{2\pi fa^2}-\delta_0\left(2\operatorname{arctg}e''_c-\frac{B_2}{e^2}E''_c-\frac{2B_1}{e'^2}E'_c\right)\right]\Big/$$

$$\left[n^3\left(2\text{arctg}\, e' - \frac{B_2}{e^2}E'' - \frac{2B_1}{e'^2}E'\right) - \left(2\text{arctg}\, e''_c - \frac{B_2}{e^2}E''_c - \frac{2B_1}{e'^2}E'_c\right)\right] = \delta_e(n, B) \tag{15}$$

5 讨论

由式(10)和式(15)可见,参数椭球在等位条件下的外密度不再像在准等位条件下的外密度式(5)和式(8)那样仅仅只是深度参数 n 的函数,而且还与纬度相关.因此,分层匀质的参数椭球不可能满足表面重力位处处相等的等位条件.也就是说,表面重力位处处相等的水准椭球的密度分布与纬度密度相关,不可能是匀质分层的.

对于参数椭球而言,准等位条件和等位条件并不是无关的.由文献[3]的研究结果可知,在极点和赤道重力位相等的约束条件下,当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球的内椭球趋向麦克劳林椭球.也就是说,在匀质分层的情况下,椭球的准等位条件可以转化为等位条件.在文献[4]和文献[5]中,水准椭球的纬向密度函数是由"极点重力的纬向密度积分公式"和"赤道重力的纬向密度积分公式"构筑的,也就是说,目前求解出的纬向密度函数仅仅满足准等位条件,而非等位条件.虽然匀质分层椭球的准等位条件在一定的情况下可以转化成等位条件,但是要对纬向密度椭球进行这种转化在数学上要复杂得多.本文作者曾尝试这一工作,但深感力不从心,借此机会提请同行关注.

著名地球重力学家莫里茨(H. Moritz)认为:"水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的"[8].也许可以这样说,谁能够求解出水准椭球满足等位条件、而不仅仅是准等位条件的纬向密度分布函数,谁就获取了地球重力学中的一颗闪光的宝石.

参考文献:

[1] 郝晓光.参数椭球表面的重力[J].地球科学,1997,22(2):223-226.

[2] 郝晓光,许厚泽,刘大杰.地球的重力聚点及参数椭球的地球重力学性质[J].测绘学报,2000,29(2):109-113.

[3] 郝晓光,许厚泽,刘大杰.参数椭球数学性质的初步研究[J].测绘学报,2001,30(3):203-207.

[4] 郝晓光,许厚泽.水准椭球的纬向密度分布[J].测绘学报,1998,27(4):345-351.

[5] 郝晓光,许厚泽,刘大杰.地球的密度扁率与纬向正常密度假说[J].中国科学(D辑),2000,30(4):436-441.

[6] 郝晓光.板块运动的纬向重力模式[J].同济大学学报(自然科学版),2001,29(6):653-656.

[7] 郭俊义.物理大地测量学基础[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994.

[8] 莫里茨 H.地球形状——理论大地测量学和地球内部物理学[M].陈俊勇,左传惠译.北京:测绘出版社,1992.

·下期文章摘要预报·

水下地形分析中基于不规则三角网的土方量计算

王丽华,施一民,王卫安

土方量计算有多种算法,在概述了传统的基于断面的算法后,分析了其弊端所在.然后根据水下地形分析的特点,提出并研制了有关的新算法——基于不规则三角网(TIN)的直接计算法.着重介绍了该算法的原理、论证及应用等.该算法已成功应用于对长江口水下地形所进行的空间分析中,并经受了生产实践的检验.