

地球纬向正常密度函数系数的修正^{*}

郝晓光 刘根友

(中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室,武汉 430077)

摘要 在求解地球纬向正常密度函数的过程中,改进了积分变换方法,重新推导了水准椭球的极点重力纬向密度积分公式和赤道重力纬向密度积分公式,并对这两个积分公式进行了解算,其结果修正了地球纬向正常密度函数中的系数。

关键词 纬向正常密度函数 系数 修正

中图分类号 :P223 **文献标识码** :A

MODIFICATION OF COEFFICIENT OF THE EARTH LATITUDINAL NORMAL DENSITY FUNCTION

Hao Xiaoguang and Liu Genyou

(Key Laboratory of Dynamical Geodesy, IGG, CAS, Wuhan 430077)

Abstract Having improved the method of integral transformation for establishing the function of the earth latitudinal normal density, this paper modifies the coefficients of the earth latitudinal normal density function.

Key Words :latitudinal normal density function, coefficient, modification

1 引言

最早用于研究地球密度的地球重力学理论,是克莱劳(A. C. Clairaut)于 1743 年发表的平衡形状理论。勒让德(A. M. Legendre)和拉普拉斯(P. S. Laplace)于 1825 年根据这个理论得到了地球内部的密度定律。此后,达尔文(G. H. Darwin)于 1884 年、维歇特(E. Wiechert)于 1897 年、布拉德(E. C. Bullard)于 1945 年、布伦(K. E. Bullen)于 1975 年分别得到了类似的密度定律。但是这些密度定律得到的都是地球的径向密度分布 $\rho = \rho(r)$,而没有得到

地球的纬向密度分布 $\rho = \rho(B)$,使得地球重力学在研究地球纬向密度方面出现了空白。

研究地球的纬向密度分布对认识地球物质的纬向迁移有重要意义。对于研究和探讨大陆漂移及板块运动的动力问题来说,地球物质的纬向分布和纬向迁移比起地球物质的径向分布和径向迁移具有更直接的联系。

针对地球物质的纬向分布问题,作者按照地球重力学的方法进行了持续的研究,并初步得到了以下结果:1996 年研究了匀质椭球与水准椭球的重力差别,进而提出了水准椭球的密度分布与纬度密切

* 收稿日期:2001-11-29

基金项目:中国科学院知识创新项目(KZCX2-106)资助

作者简介:郝晓光,1958 年生,高级工程师,博士、博士后,主要从事地球重力学研究

相关的设想^[1];1998年提出了地球的“纬向密度”概念,初步求解出整体地球的“纬向正常密度函数” $\rho = (B)^{[2]}$;2000年提出了地球的“密度扁率”概念,进而提出了地球“纬向正常密度假说”^[3];2001年给出了山脉隆升和盆地沉陷的“纬向密度异常”模型,进而提出了板块运动的“纬向重力模式”^[4]。

文献[2]和文献[3]给出了地球纬向正常密度函数 $\rho = (B)$,但是,作者在计算该函数中的系数 ρ_E 和 ρ_P 时,由于对积分变换方法考虑不周,因而导致了较大的数值偏差。本文改进了求解地球纬向正常密度函数的积分变换方法,对 ρ_E 和 ρ_P 的数值进行了修正。

2 纬向正常密度的函数形式

由纬向密度的定义可知,“地球纬向密度”为某纬度“地表至地心向径的垂直平均密度”。文献[2]、[3]给出的地球纬向正常密度的函数形式为:

$$\rho(B) = \sqrt{\rho_E^2 \cos^2 B + \rho_P^2 \sin^2 B} \quad (1)$$

式中的系数 ρ_E 、 ρ_P 为待定常数,是地球赤道、极点的纬向正常密度。

3 极点重力纬向密度积分公式

推导极点重力纬向密度积分公式时,采用“极原点坐标系”(见图1), r 为以南极点为坐标原点的向径, b 为极距, θ 为经度。地球椭球面方程 r_0 的表达式为:

$$\frac{r_0^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{(r_0 \cos \theta - b)^2}{b^2} = 1, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad r_0 = \frac{2b(1 + e^2) \cos \theta}{1 + e^2 \cos^2 \theta} \quad (2)$$

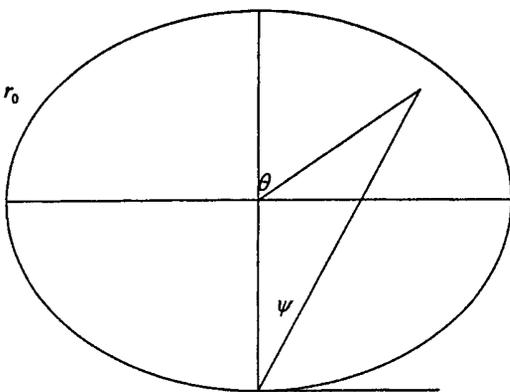


图1 极原点坐标系

Fig. 1 Coordinate system with polar origin

采用水准椭球的极点重力为约束条件,极点重力纬向密度积分公式为:

$$P = G \int_0^{\theta} \frac{\rho \cos \theta}{r^3} d\theta = G \int_0^{\theta} \frac{\rho}{r^2} \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (3)$$

式中 $d = r^2 \sin \theta d\theta dr$ 。

为求积分之便,将由纬度表达的纬向正常密度函数 $\rho = (B)$ 转换成由地心纬度余角 θ 来表达,则(1)式可近似为:

$$\rho = (\theta) = \rho_E \sin^2 \theta + \rho_P \cos^2 \theta \quad (4)$$

若令 $\rho = \rho' / \rho_E$,则上式变为:

$$(\theta) = \rho_E (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (5)$$

在第一象限中(见图1),由正弦定理可得:

$$r / \sin(\theta - \theta) = b / \sin(\theta - \theta) \quad (6)$$

由下列函数关系:

$$\sin(\theta - \theta) = \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta, \quad \cos^2 \theta = 1 / (1 + \tan^2 \theta)$$

(6)式可变为

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{(r \cos \theta - b)^2}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \\ \sin^2 \theta &= \frac{(r \sin \theta)^2}{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5)可得:

$$\rho = \rho_E \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r^2 - (2b \cos \theta) r + b^2}{r^2 - (2b \cos \theta) r + b^2} = \rho_E I(\theta, r) \quad (8)$$

虽然 θ 的定义在图1椭圆中的象限为顺时针向,象限为逆时针向,但是不难证明,(8)式同时适用于这两个象限,这就使得以下积分无需分南、北半球进行。将(8)式代入(3)式可得:

$$P = 2 G \rho_E \int_0^{\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{r_0} I(\theta, r) dr \quad (9)$$

求不定积分:

$$\begin{aligned} \text{极}(\theta, r) &= \int I(\theta, r) dr = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r + \\ & b \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \times [\cos \theta \ln(r^2 - 2br \cos \theta + b^2) + \\ & \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \arctan \frac{r - b \cos \theta}{b \sin \theta}] \end{aligned} \quad (10)$$

应用上式,则(9)式变为

$$P = 2 G \rho_E \int_0^{\theta} \cos \theta \sin \theta [\text{极}(\theta, r_0) - \text{极}(\theta, 0)] d\theta \quad (11)$$

以上就是地球极点重力纬向密度积分公式,式中 r_0 由(2)式给出。

4 赤道重力纬向密度积分公式

推导赤道重力纬向密度积分公式时,采用“赤道原点坐标系”(见图2), r 为以赤道点为坐标原点的向径, b 为极距, θ 为广义经度。地球椭球面方程 r_0

的表达式为:

$$\frac{r_0^2 \sin^2 \cos^2 + (r_0 \cos - a)^2}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \sin^2}{b^2} = 1$$

$$r_0 = \frac{2a \cos}{1 + e^2 \sin^2 \sin^2} \quad (12)$$

采用水准椭球的赤道重力 g_e 为约束条件,赤道重力纬向密度积分公式为:

$$g_e + a^2 = G \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \sin d}{r^3} d \quad (13)$$

式中 $d = r^2 \sin d d r$.

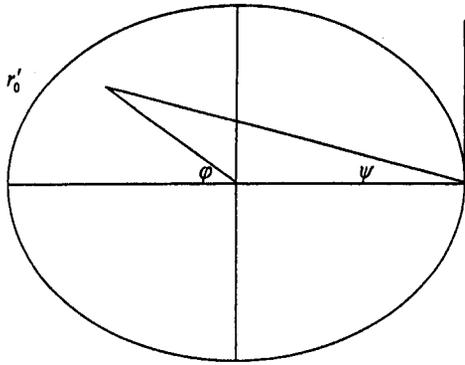


图2 赤道原点坐标系

Fig.2 Coordinate system with equatorial origin

由(12)式可见, r_0 随 \sin^2 的变化仅产生微小变化,故取 $\bar{\sin^2}$ 为其变化值的中数,则

$$r_0 = \frac{2a \cos}{1 + e^2 \bar{\sin^2} \sin^2} \quad (14)$$

为了确定 $\bar{\sin^2}$,令 $\sin^2 = 0$,则由(13)式可得:

$$g_e + a^2 = 2 G \int_0^{\pi/2} \cos \sin \frac{2a \cos}{1 + e^2 \sin^2 \sin^2} d \quad (15)$$

式中, ρ_0 为匀质椭球密度, g_e 为匀质椭球赤道重力,二者均为已知常数。故由上式用数值积分可算出 $\bar{\sin^2} = 0.499 52$ 、 $\bar{\sin^2} = 44.972 498^\circ$,则(14)式变为:

$$r_0 = \frac{2a \cos}{1 + 0.499 52 e^2 \sin^2} \quad (16)$$

由于上式中已不含 \sin^2 ,故(13)式可改写为:

$$g_e + a^2 = 2 G \int_0^{\pi/2} \cos \sin d \frac{r_0}{r} d r \quad (17)$$

在图2中, θ 为地心纬度,故(5)式可改写为:

$$= () = \rho_0 (\cos^2 + \sin^2) \quad (18)$$

在第二象限中(见图2),由正弦定理可得:

$$r / \sin(\theta - \psi) = a / \sin(\theta - \phi) \quad (19)$$

对照(7)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 &= \frac{(r \cos - a)^2}{r^2 + a^2 - 2 r a \cos} \\ \sin^2 &= \frac{(r \sin)^2}{r^2 + a^2 - 2 r a \cos} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将上式代入(18)式可得:

$$= \rho_0 \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 + \cos^2) r^2 - (2 a \cos) r + a^2}{r^2 - (2 a \cos) r + a^2} r + a^2 \quad (21)$$

虽然 θ 的定义在图2椭圆中的 θ 象限为顺时针向、 ψ 象限为逆时针向,但是不难证明,(21)式同时适用于这两个象限,这就使得以下积分无需分东、西半球进行。将(21)式代入(17)式可得:

$$g_e + a^2 = 2 G \rho_0 \int_0^{\pi/2} \cos \sin d \int_0^{r_0} \frac{r}{r^2 - (2 a \cos) r + a^2} d r \quad (22)$$

参照(10)式可得:

$$\begin{aligned} \text{赤}(\theta, r) &= \int_0^{\pi/2} \cos \sin d \int_0^{r_0} \frac{r}{r^2 - (2 a \cos) r + a^2} d r \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \sin d \left[\frac{1}{2} (\sin^2 + \cos^2) r + \frac{a \sin^2}{2} \ln(r^2 - 2 a \cos r + a^2) + \frac{\cos^2}{\sin} \arctan \frac{r - a \cos}{a \sin} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

应用上式,则(22)式变为:

$$g_e + a^2 = 2 G \rho_0 \int_0^{\pi/2} \cos \sin d \left[\text{赤}(\theta, r_0) - \text{赤}(\theta, 0) \right] d \quad (24)$$

以上就是地球赤道重力纬向密度积分公式,式中 ρ_0 由(16)式给出。

5 求解待定常数

极点重力纬向密度积分公式和赤道重力纬向密度积分公式中有 ρ_0 和 P 两个未知数,由(11)式和(24)式消去 ρ_0 可得:

$$\frac{P}{g_e + a^2} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \sin d [\text{极}(\theta, r_0) - \text{极}(\theta, 0)] d \theta}{\int_0^{\pi/2} \cos \sin d [\text{赤}(\theta, r_0) - \text{赤}(\theta, 0)] d \theta} \quad (25)$$

在上式中只有一个未知数 P 。常数 $P = 983.218 637$ 、 $g_e = 978.032 726 \text{ (cm/s}^2\text{)}$ 、 $a = 637 813 700$ 、 $b = 635 675 200 \text{ (cm)}$ 、 $\omega = 7 292 115 \times 10^{-11} \text{ (s}^{-1}\text{)}$ 、 $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ (cm}^3/\text{gs}^2\text{)}$ 、 $GM = 3 986 005 \times 10^{14} \text{ (cm}^3/\text{s}^2\text{)}$ 。用数值积分解算(25)式可得 $P = 1.007 935 35$,将代入(11)式可得 $\rho_0 = 5.496 247$ 、 $P = \rho_0 = 5.539 862 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ 。

于是,由(18)式或(1)式,最终得到的地球纬向正常密度函数为:

$$\rho(r) = 5.496 247 \cos^2 + 5.539 862 \sin^2 \quad (26)$$

或

$$(B) = \sqrt{5.496247^2 \cos^2 B + 5.539862^2 \sin^2 B} \quad (27)$$

式中 B 为椭球地心纬度, B 为椭球地理纬度。数值验算表明, 以上两式差别不大。

6 讨论

莫里茨(H. Moritz)认为:“1980大地参考系统采用等位椭球作为参照面, 因此很自然地会提出这样一个问题, 即这一椭球所相应的物质分布构形。实际上, 水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的, 但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的。”^[5]

虽然“水准椭球非均匀的物质分布是一定存在的”, 但水准椭球非均匀的物质分布在数学上并不是唯一的。由哈密顿(Hamilton)原理可知: 若 T 为系统的动能, S 为系统的势能, 则 $L = T - S$ 为系统的拉格朗日(Lagrange)函数, 如果系统从时间 t_1 到时间 t_2 , 相对系统的可能运动而言, 系统“真实”运动的作用积分 $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ 具有极小值。所以, 本文给出的

“地球纬向正常密度函数”只是水准椭球内部密度的一种“可能分布”, 为了了解这种可能分布的“真实性”, 下一步应该对与“地球纬向正常密度函数”相对应的拉格朗日函数以及水准椭球的哈密顿问题进行深入的研究。

References

- 1 Hao Xiaoguang. Modification of conception of latitude correction in gravity measurement [J]. Crustal Deformation and Earthquake, 1996, 16(3): 8 - 13 (in Chinese)
- 2 Hao Xiaoguang and Xu Houze. Latitudinal normal density of the level ellipsoid [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(4): 345 - 351 (in Chinese)
- 3 Hao Xiaoguang, Xu Houze and Liu Dajie. Earth's density flattening and hypothesis of latitudinal normal density [J]. Science in China (Series D), 2000, 30(4): 436 - 441 (in Chinese)
- 4 Hao Xiaoguang. Latitudinal gravity mode of plate movement [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2001, 29(6): 653 - 656 (in Chinese)
- 5 Moritz H. The figure of the earth: theoretical geodesy and the earth's interior [M]. translated by Chen Jurrong and Zuo Chuanhui. Beijing: Surveying and Mapping Publishing House, 1992. (in Chinese)

湖北省副省长王少阶视察中国地震局地震研究所 强调地震台网建设是防震减灾工作的基础

湖北省副省长王少阶一行3人于3月15日来到中国地震局地震研究所检查防震减灾工作, 认真听取了防震减灾工作汇报。

中国地震局地震研究所所长李强在震情会商室通过多媒体演示系统, 向王少阶副省长一行介绍了全国和全省地震形势, 汇报了全省“九五”期间防震减灾工作所取得的工作成绩以及全省“十五”防震减灾工作计划, 并就“十五”湖北省地震应急快速反应技术系统立项情况提出了意见和建议。

王少阶副省长听取汇报后强调指出, 湖北省地震监测能力和技术水平与湖北省震情形势不相适应, 要加快地震台网与地震应急快速反应技术系统建设的步伐。地震工作涉及人民生命财产安全, 地震部门是特殊部门, 工作特殊, 责任重大。“十五”防震减灾要着重抓好三个方面的工作: 第一是要加强地震台建设; 第二是三峡和南水北调工程水库诱发地震监测预报工作要引起国家的高度重视, 水库诱发地震监测系统争取在国家立项; 第三是湖北地震应急快速反应系统建设既要列入湖北“十五”计划, 也要争取中国地震局的支持。

最后王少阶副省长反复强调地震台网建设是防震减灾工作的基础, 指出了湖北省“十五”防震减灾立项工作的重要性, 他要求地震研究所加强与湖北省省政府各部门的沟通, 围绕各级地震工作机构的设置、地震事业经费的投入和地震台网的改造来开展立项工作, 并借鉴外省局的成功经验, 来做好湖北省“十五”期间地震台网与地震应急快速反应技术系统建设项目的申报工作。

中国地震局地震研究所 王佩莲
2002年3月18日