

# 参数椭球数学性质的初步研究

郝晓光<sup>1,2</sup>, 许厚泽<sup>1</sup>, 刘大杰<sup>2</sup>

(1. 中国科学院 测量与地球物理研究所, 湖北 武汉 430077; 2 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092)

## A Preliminary Study of Mathematical Properties of the Parameter Ellipsoid

HAO Xiao-guang<sup>1,2</sup>, XU Hou-ze<sup>1</sup>, LIU Da-jie<sup>2</sup>

(1. Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan 430077, China; 2 Department of Surveying and Geomatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** This paper probes into mathematical properties of the parameter ellipsoid. Its result shows that under the restricted condition of both point gravity potential equality for pole and equator, the boundary surface within the double layer ellipsoid limitlessly being tendency to the ellipsoid surface, the interior ellipsoid of the parameter ellipsoid tends to Maclaurin ellipsoid. This result proves mathematical exist of the parameter ellipsoid, so that a progress to the gravitation problem of double layer ellipsoid is gained.

**Key words** parameter ellipsoid; boundary face depth parameter; Maclaurin ellipsoid

**摘要:** 对“参数椭球”的数学性质进行了初步研究,在极点和赤道重力位相等的约束条件下,当“双层椭球”内的界面无限趋向参数椭球表面时,参数椭球的内椭球趋向麦克劳林椭球。这个结果核对了参数椭球的数学存在,对研究解决双层椭球的引力问题来说,向前迈进了一步。

**关键词:** 参数椭球; 界面深度参数; 麦克劳林椭球

## 1 前言

球的引力问题在数学上很简单,但椭球的引力问题则比较复杂。牛顿(NEWTON)用了几个球的比例方法,仅仅只求出了匀质椭球上赤道与极点的引力的比例。后来,经过麦克劳林(C. Maclaurin)、雅可比(K. G. J. Jacobi)、拉格朗日(J. L. Lagrange)、拉普拉斯(P. S. Laplace)、艾复来(J. Ivory)和恰勒(M. Chasles)等人的研究,匀质椭球的引力问题最终得到了完备的解决<sup>[1]</sup>。

地球不是匀质椭球,但基本上是一个“多层椭

球”。因此,在匀质椭球的基础上,研究多层椭球的引力问题,在地球重力学中有重要意义。如果能把椭球各层的密度参数和界面深度参数作为变量引入椭球,就能够在椭球表面的重力与椭球内部的密度和界面深度之间建立起严格的函数关系,使之成为采用地球表面的重力测量数据来研究地球整体密度变化和界面深度变化的数学工具。1997年,笔者将“密度参数”和“界面深度参数”作为变量引入“双层椭球”,严格导出了双层椭球表面的重力公式,首次提出了“参数椭球”的概念<sup>[2]</sup>。按照文献[2]的定义,参数椭球是一种以密度参数和界

收稿日期: 2000-04-13; 修回日期: 2001-02-22

基金项目: 中国科学院院长基金; 同济大学博士后基金

作者简介: 郝晓光(1958-),男,上海市人,中国科学院测量与地球物理研究所高级工程师,博士,主要从事地球重力学研究。

面深度参数为自变量、以表面重力为因变量的“函数椭球”。最近,笔者等对“参数椭球”的地球物理性质进行了研究,在纬度±35°21'32"处发现了一个有趣的特征点,首次提出了“重力聚点”的概念,给出了参数椭球的密度分布定理、物质流动定理和重力聚点定理<sup>[3]</sup>,提出了地核物质扰动的重力效应在两极和赤道处最大,在“重力聚点”处最小的观点。本文对参数椭球的数学性质进行初步研究,以探求参数椭球在数学上的存在性。

## 2 参数椭球表面的引力位

由图1可见,参数椭球由内、外两个相似的旋转椭球构成。 $a, b$ 分别为外椭球的长、短半轴, $a_n, b_n$ 分别为内椭球的长、短半轴, $\delta_e$ 为外密度参数, $\delta_i$ 为内密度参数, $\delta$ 和 $\delta_n$ 为不随纬度变化的常密度参数。 $\delta$ 为平均密度, $n$ 为界面深度参数。 $a_n = na, b_n = nb, 0 < n < 1$ 。由于参数椭球的总质量 $M$ 是不变的,所以 $\delta, \delta_n, n$ 有以下函数关系

$$\delta n^3 + \delta(1 - n^3) = \delta \quad (1)$$

基本符号: $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ 为第一偏心率, $e_c^2 = (a^2 - b^2)/b^2$ 为第二偏心率, $M$ 为质量, $\omega$ 为角速度, $\delta = 3M/4\pi a^2 b$ 为平均密度, $G$ 为万有引力常数, $B$ 为地理纬度。

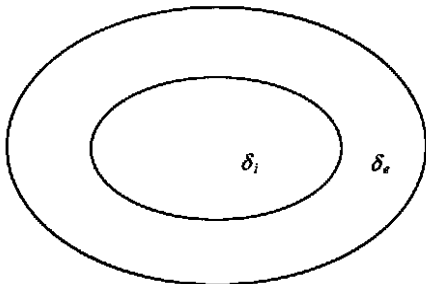


图1  
Fig 1

由物理大地测量学可知,若 $(x_0, y_0, z_0)$ 为匀质椭球表面任意一点,则匀质椭球表面点的引力位为<sup>[4]</sup>

$$V_0 = -\frac{1}{2}P_0(x_0^2 + y_0^2) - \frac{1}{2}Q_0 z_0^2 + K_0 \quad (2)$$

式中

$$P_0 = 2\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} \left( \arctan e - \frac{e}{1+e^2} \right) \quad (3)$$

$$Q_0 = 4\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} (e - \arctan e) \quad (4)$$

$$K_0 = 2\pi G \delta \frac{a^2}{e} \arctan e \quad (5)$$

对照式(2)、式(3)、式(4)、式(5),若 $(x_0, y_0, z_0)$ 为参数椭球表面任意一点,则参数椭球表面点的引力位为<sup>[2]</sup>

$$V = -\frac{1}{2}P(x_0^2 + y_0^2) - \frac{1}{2}Qz_0^2 + K \quad (6)$$

式中

$$P = P_1 - P_2 + P_3$$

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3$$

$$K = K_1 - K_2 + K_3$$

$$P_1 = 2\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} \left( \arctan e - \frac{e}{1+e^2} \right)$$

$$P_2 = 2\pi G \delta \frac{1+e_c^2}{e^3} \left( \arctan e_c - \frac{e_c}{1+e_c^2} \right)$$

$$P_3 = 2\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} \left( \arctan e_c - \frac{e_c}{1+e_c^2} \right)$$

$$Q_1 = 4\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} (e - \arctan e)$$

$$Q_2 = 4\pi G \delta \frac{1+e_c^2}{e^3} (e_c - \arctan e_c)$$

$$Q_3 = 4\pi G \delta \frac{1+e^2}{e^3} (e_c - \arctan e_c)$$

$$K_1 = 2\pi G \delta \frac{a^2}{e} \arctan e$$

$$K_2 = 2\pi G \delta \frac{a^2}{e} \arctan e_c$$

$$K_3 = 2\pi G \delta \frac{a^2}{e} \arctan e_c$$

所以

$$P = 2\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta_n) \left( \arctan e_c - \frac{e_c}{1+e_c^2} \right) + \delta_n \left( \arctan e - \frac{e}{1+e^2} \right)] \quad (7)$$

$$Q = 4\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta_n) (e_c - \arctan e_c) + \delta_n (e - \arctan e)] \quad (8)$$

$$K = 2\pi G \frac{a^2}{e} [(\delta - \delta_n) \arctan e_c + \delta_n \arctan e] \quad (9)$$

式中

$$e_c = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c}}, e_a = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_a}}, e_b = \frac{nbe}{\sqrt{n^2 b^2 + c_b}} \quad (10)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + n^2 b^2 - \rho^2) \right] \quad (11)$$

$$c_a = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - a^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - \right]$$

$$(n^2 a^2 + nb^2 - a^2) \tag{12}$$

$$c_b = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n^2 a^2 + n^2 b^2 - b^2)^2 + 4n^2 a^2 b^2 (1 - n^2)} - (n^2 a^2 + nb^2 - b^2) \right] \tag{13}$$

在式(11)中,  $\rho$  为向径

$$\rho = [(a^4 \cos^2 B + b^4 \sin^2 B) / (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)]^{1/2}$$

### 3 参数椭球极点和赤道的重力等位条件

在极点,  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = b$ 。由于极点处的离心力位为零, 所以由式(6)可知参数椭球的极点重力位  $U_P$  为

$$U_P = V_P = -\frac{1}{2} Q_P b^2 + K_P \tag{14}$$

在赤道,  $x_0^2 + y_0^2 = a^2, z_0 = 0$ 。由于赤道处的离心力位为  $\omega^2 a^2 / 2$ , 所以由式(6)可知参数椭球的赤道重力位  $U_E$  为

$$U_E = V_E + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 = -\frac{1}{2} (P_E - \omega^2) a^2 + K_E \tag{15}$$

于是, 参数椭球极点和赤道的重力等位条件为

$$-\frac{1}{2} (P_E - \omega^2) a^2 + K_E = -\frac{1}{2} Q_P b^2 + K_P \tag{16}$$

由式(7)、式(8)、式(9)和式(10), 可知式(16)中

$$P_E = 2\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta') (\arctan e_a - \frac{e_a}{1+e_a^2}) + \delta' (\arctan e - \frac{e}{1+e^2})] \tag{17}$$

$$Q_P = 4\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta') (e_b - \arctan e_b) +$$

$$\delta' (n) = \frac{\delta}{n^{3+}} (1 - \frac{1}{n^3}) \frac{\delta [2(\arctan e_a - \arctan e_b) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2}] + \frac{\omega^2 e n^3}{2\pi G}}{2(\arctan e_a - \arctan e_b) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2} + n^3 (\frac{E_a}{e^2} - \frac{2E_b}{e^2})} \tag{26}$$

### 4 极点与赤道重力等位条件下的界面扩张

当  $n \rightarrow 1$  时, 参数椭球内的界面趋向参数椭球表面, 我们称之为参数椭球的“界面扩张”。由式(1)可见, 如不附加任何约束条件, 当  $n \rightarrow 1$  时, 参数椭球的内密度参数  $\delta$  退化成平均密度  $\delta$ , 参数椭球退化成匀质椭球。若将式(1)与式(16)合并成

$$A(n) = \frac{n^3 - 1}{2(\arctan e_a - \arctan e_b) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2} + n^3 (\frac{E_a}{e^2} - \frac{2E_b}{e^2})} \tag{27}$$

则式(26)可改写为

$$\delta' (e - \arctan e) \tag{18}$$

$$K_E = 2\pi G \frac{a^2}{e} [(\delta - \delta') \arctan e_a + \delta' \arctan e] \tag{19}$$

$$K_P = 2\pi G \frac{a^2}{e} [(\delta - \delta') \arctan e_b + \delta' \arctan e] \tag{20}$$

将式(17)和式(18)中的符号进行简化得

$$\left. \begin{aligned} E &= \arctan e - \frac{e}{1+e^2} \\ E_a &= \arctan e_a - \frac{e_a}{1+e_a^2} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= e - \arctan e \\ E_b &= e_b - \arctan e_b \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

将式(21)和式(22)代入式(17)和式(18)得

$$P_E = 2\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta') E_a + \delta' E] \tag{23}$$

$$Q_P = 4\pi G \frac{1+e^2}{e^3} [(\delta - \delta') E_b + \delta' E] \tag{24}$$

将式(19)、式(20)和式(23)、式(24)代入式(16)可得

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{e} [(\delta - \delta') \arctan e_a + \delta' \arctan e] - \frac{a^2}{2} \frac{1+e^2}{e^3} \times \\ &[(\delta - \delta') E_a + \delta' E] + \frac{\omega^2 a^2}{4\pi G} = \\ &\frac{a^2}{e} [(\delta - \delta') \arctan e_b + \delta' \arctan e] - b^2 \frac{1+e^2}{e^3} \times \\ &[(\delta - \delta') E_b + \delta' E] \end{aligned} \tag{25}$$

将式(1)代入式(25)消去外密度参数  $\delta$ , 经整理后可得  $\delta' = \delta'(n)$ , 上标  $u$  表示内密度参数  $\delta$  与界面深度参数  $n$  的函数关系, 满足极点和赤道的重力等位条件式(16), 即

式(26), 这就给参数椭球的“界面扩张”附加上了“极点和赤道的重力等位条件”。在“极点和赤道的重力等位条件”约束下, 当参数椭球内的界面无限趋向参数椭球表面时, 参数椭球的内密度参数  $\delta'(n \rightarrow 1)$ 。

将式(26)中的符号进行简化, 令

$$\delta(n) = \frac{\delta_0}{n^3} + \frac{A(n)}{n^3} \{ \delta [2(\arctan e_a - \arctan e_b) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2}] + \frac{\omega e n^3}{2\pi G} \} \quad (28)$$

令:  $n \rightarrow 1$ , 则式(28)变为

$$\delta(n \rightarrow 1) = \delta_0 + \{ \delta [2(\arctan e_a - \arctan e_b) - \frac{E_a}{e^2} + \frac{2E_b}{e^2}] + \frac{\omega e}{2\pi G} \} A(n \rightarrow 1) \quad (29)$$

由式(10)、式(12)、式(13)、式(21)和式(22)可知, 当  $n \rightarrow 1$  时

$$e_a = e_b = e, c_a = c_b = 0, E_a = E, E_b = E \quad (30)$$

将式(30)代入式(29)得

$$\delta(n \rightarrow 1) = \delta_0 + [ \delta (\frac{2E}{e^2} - \frac{E}{e^2}) + \frac{\omega e}{2\pi G} ] A(n \rightarrow 1) \quad (31)$$

考察式(27)可知

$$A(n \rightarrow 1) = \frac{0}{0}$$

对式(27)采用“罗贝塔法则”求极限

$$A(n \rightarrow 1) = 3n^2 \left[ 2 \left( \frac{de_a}{1+e_a^2} - \frac{de_b}{1+e_b^2} \right) - \frac{de_a}{e^2} + \frac{2de_b}{e^2} + 3n^2 \left( \frac{E}{e^2} - \frac{2E}{e^2} \right) \right]^{-1} \quad (32)$$

由式(10)和式(12)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_a}{dn} &= \frac{nb^2e^2}{2e_a} \frac{2c_a - n}{(n^2b^2 + c_a)^2} \frac{dc_a}{dn} \\ \frac{dc_a}{dn} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{dB_a}{dn} - 2n(a^2 + b^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中

$$B_a = \frac{1}{2} (n^2a^2 + n^2b^2 - a^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)$$

$$\left. \frac{dB_a}{dn} \right|_{n=1} =$$

$$\left. \frac{4n(a^2 + b^2)(n^2a^2 + n^2b^2 - a^2) + 8n^2a^2b^2(1 - 2n^2)}{2[(n^2a^2 + n^2b^2 - a^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)]} \right|_{n=1} = 2b^2 - 2a^2$$

将上式代入式(33)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_a}{dn} \Big|_{n=1} &= -2a^2 \\ \frac{de_a}{dn} \Big|_{n=1} &= e(1 + e^2) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

由式(10)和式(13)可得

$$\begin{aligned} \frac{de_b}{dn} &= \frac{nb^2e^2}{2e_b} \frac{2c_b - n}{(n^2b^2 + c_b)^2} \frac{dc_b}{dn} \\ \frac{dc_b}{dn} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{dB_b}{dn} - 2n(a^2 + b^2) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

式中

$$B_b = \frac{1}{2} (n^2a^2 + n^2b^2 - b^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)$$

$$\left. \frac{dB_b}{dn} \right|_{n=1} =$$

$$\left. \frac{4n(a^2 + b^2)(n^2a^2 + n^2b^2 - b^2) + 8n^2a^2b^2(1 - 2n^2)}{2[(n^2a^2 + n^2b^2 - b^2)^2 + 4n^2a^2b^2(1 - n^2)]} \right|_{n=1} = 2a^2 - 2b^2$$

将上式代入式(35)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_b}{dn} \Big|_{n=1} &= -2b^2 \\ \frac{de_b}{dn} \Big|_{n=1} &= e \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

由式(21)和式(34)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_a}{dn} &= \left[ \frac{1}{1+e_a^2} - \frac{1-e_a^2}{(1+e_a^2)^2} \right] \frac{de_a}{dn} \\ \frac{dE_a}{dn} \Big|_{n=1} &= \frac{2e^3}{1+e^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

由式(22)和式(36)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_b}{dn} &= \left( 1 - \frac{1}{1+e_b^2} \right) \frac{de_b}{dn} \\ \frac{dE_b}{dn} \Big|_{n=1} &= \frac{e^3}{1+e^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

于是, 将式(37)、式(38)代入式(32)并顾及式(30)得

$$A(n \rightarrow 1) = 3 \left[ \frac{2e^3}{1+e^2} - \frac{2e^3}{e^2(1+e^2)} + \frac{2e^3}{e^2(1+e^2)} + 3 \left( \frac{E}{e^2} - \frac{2E}{e^2} \right) \right]^{-1} \quad (39)$$

即

$$A(n \rightarrow 1) = 3 \left[ \frac{2e^3}{1+e^2} \left( 1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} \right) + 3 \left( \frac{E}{e^2} - \frac{2E}{e^2} \right) \right]^{-1} \quad (40)$$

因为

$$1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$$

所以

$$A(n \rightarrow 1) = \left( \frac{E}{e^2} - \frac{2E}{e^2} \right)^{-1}$$

将上式代入式(31)得

$$\delta(n \rightarrow 1) = \frac{\omega e}{2\pi G} A(n \rightarrow 1) \quad (41)$$

因为

$$\frac{e^2}{e^2} = \frac{a^2}{b^2} = 1 + e^2$$

所以

$$A(n-1) = \frac{e^2}{(1+e^2)E - 2E}$$

将式(21)和式(22)代入上式得

$$A(n-1) = \frac{e^2}{(3+e^2)\arctan e - 3e} \quad (42)$$

将式(42)代入式(41)得

$$\delta(n-1) = \frac{\omega^2 e^3}{2\pi G [(3+e^2)\arctan e - 3e]} \quad (43)$$

### 5 参数椭球与麦克劳林椭球的数学关系

由物理大地测量学可知, 麦克劳林椭球是“等位匀质椭球”, 与普通匀质椭球不同的是, 麦克劳林椭球表面为重力等位面。受等位条件的限制, 麦克劳林椭球的质量  $M_M$  及麦克劳林椭球的密度  $\delta_1$  与椭球的长、短半轴  $a, b$  和角速度  $\omega$  有以下函数关系<sup>[5]</sup>

$$\delta_1 = \frac{3M_M}{4\pi a^2 b} = \frac{\omega^2 a e^3}{2\pi G b [(3+e^2)\arctan e - 3e]} (1+e^2) \quad (44)$$

因为

$$1+e^2 = \frac{a}{b}$$

所以

$$\delta_1 = \frac{\omega^2 e^3}{2\pi G [(3+e^2)\arctan e - 3e]} = \delta(n-1)$$

由上可见, 在参数椭球的极点和赤道重力位相等的约束条件下, 当双层椭球内的界面无限趋

向参数椭球表面时, 参数椭球的内密度趋向麦克劳林椭球的密度。这个结果将参数椭球与麦克劳林椭球紧密地联系在一起, 核实了参数椭球的数学存在。对研究解决双层椭球的引力问题来说, 向前迈进了一步。

**致谢** 本研究得到武汉大学宁津生院士、中国地震局陈鑫连研究员、同济大学金国雄教授和王家林教授的帮助, 在此表示衷心感谢!

### 参考文献:

- [1] FANG Jun. Gravimetry and Figure of the Earth [M]. Beijing: Science Press, 1975. 64-75. (in Chinese)
- [2] HAO Xiao-guang. The Gravity of Parameter Ellipsoid [J]. Earth Science-Journal of China University of Geosciences, 1997, 22 (2): 223-226. (in Chinese)
- [3] HAO Xiao-guang, XU Hou-ze, LIU Da-jie. Gravity Assembly Points of the Earth and Gravitational Features of the Parameter Ellipsoid [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000, 29(2): 109-113. (in Chinese)
- [4] GUO Jun-yi. The Fundamental of Physical Geodesy [M]. Wuhan: The Publishing House of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1994. 126-127. (in Chinese)
- [5] MORITZ H. The Figure of the Earth-theoretical Geodesy and the Earth's Interior [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1992. 108-109. (in Chinese)