

水准椭球的纬向密度分布^{*}

郝晓光 许厚泽

(中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉, 430077)

LATITUDINAL NORMAL DENSITY OF THE LEVEL ELLIPSOID

Hao Xiaoguang, Hsu Houtze

(Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, 430077)

Abstract In this paper, formula of the level ellipsoid's normal density have been derived. Therefore, the hypothesis of latitudinal normal distribution of the Earth's density is presented.

Keywords Density of the Earth, Latitudinal distribution

摘 要 本文推导了旋转椭球极点重力与赤道重力的密度积分公式。按照 1980 大地参考系统及水准椭球的“极点重力条件”和“赤道重力条件”,从数学上证明了地球的“赤道径向平均密度”大于“极点径向平均密度”,并给出了水准椭球纬向密度分布的估算公式;进而提出了“地球的径向平均密度按纬向正常分布”的假说。

关键词 地球密度 纬向分布

分类号 P223

1 前言

研究地球形状和研究地球密度,是地球重力学的两项基本任务。应用重力资料研究地球形状的理论与方法已得到充分发展,相比之下,应用重力资料研究地球密度的理论与方法显得比较薄弱。传统地球重力学与地球形状学密不可分,但对“地球密度”却似有意疏远,经典司托克斯理论及莫洛斯基理论均以回避地球密度分布为数学前提来研究地球形状。伴随空间大地测量技术的迅速发展和地球形状学理论的日臻完善,地球形状学对地球重力学理论研究新成果的需求已有所淡化;然而,岩石圈密度、地幔粘度、地壳均衡、冰后回升、物质迁移、板块运动、青藏高原隆起、地幔对流等地球科学中的“非地球形状问题”却要求地球重力学的理论研究在“地球密度问题”上取得新进展。

由于水准椭球表面的重力接近大地水准面表面的重力,据此可认为水准椭球的密度分布

^{*} 收稿日期: 1998-04-08, 截稿日期: 1998-07-25。郝晓光,男,40岁,高级工程师,博士生。
中国科学院院长基金特别支持项目和自然科学基金资助项目(编号: 49874016)。

与地球的密度分布密切相关。因此,研究水准椭球的密度分布也就成了研究地球密度分布的前提。研究水准椭球密度的径向分布前人已有不少工作,而应用地球重力学理论研究水准椭球密度纬向分布的工作似还不够充分。“事实上,水准椭球内任何合理的物质分布是不知道的,但水准椭球的非均匀、非平衡的物质分布是一定存在的”^[1]。

本文作者不久前研究了重力测量纬度改正中的密度含义^[2],预示水准椭球的密度与纬度的内在联系,并计算出匀质椭球与水准椭球的重力极差之差为 1.135402 m/s^2 。本文推导了旋转椭球极点重力与赤道重力的密度积分公式。按照 1980 大地参考系统及水准椭球的“极点重力条件”和“赤道重力条件”,从数学上证明了地球的“赤道径向平均密度”大于“极点径向平均密度”,并给出了水准椭球纬向密度分布的估算公式;进而提出了“地球的径向平均密度按纬向正常分布”的假说。按照这一假说,地球的纬向密度分布向赤道收缩,纬度越高,密度越小。

2 水准椭球径向平均密度的纬向分布形式

由物理大地测量学可知,水准椭球可由两部分构成:“内体”为“麦克劳林椭球”,“外层”为形状与“麦克劳林椭球”的外形完全重合的“单层质面”。“麦克劳林椭球”为匀质椭球,但为了满足水准椭球表面重力位相等的条件,“麦克劳林椭球”的质量与自转角速度需满足以下关系^[4]:

$$fM_{\text{麦}} = \frac{2\omega^2 a^3 e^3}{3[(3+e^2)\arctane - 3e]\sqrt{1+e^2}}$$

将 1980 大地参考系统中的常数 (a, b, ω) 代入上式进行计算,所得出的“麦克劳林椭球”的质量 $M_{\text{麦}}$ 大于 1980 大地参考系统中的 M , 为了满足斯托克司定理,水准椭球的“外层”除了应满足其表面引力位为常量外,还应保证其“负质量”恰好抵消“内体”多余的质量。能够满足这两个要求的“单层质面”的面密度是非匀质的,其公式为^[4]

$$\mu = \frac{(M - M_{\text{麦}})\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}{4\pi a^2 b}$$

令 $B = 90^\circ, B = 0^\circ$; 得“单层质面”的极点面密度和赤道面密度为

$$\mu_P = \frac{(M - M_{\text{麦}})}{4\pi a^2}$$

$$\mu_E = \frac{(M - M_{\text{麦}})}{4\pi ab}$$

$$(M - M_{\text{麦}})^2 a^2 = \mu_E^2 (4\pi a^2 b)^2$$

$$(M - M_{\text{麦}})^2 b^2 = \mu_P^2 (4\pi a^2 b)^2$$

$$\text{得} \quad \mu = \mu(B) = \sqrt{\mu_E^2 \cos^2 B + \mu_P^2 \sin^2 B} \quad (1)$$

因“麦克劳林椭球”为匀质椭球,故设水准椭球的径向平均密度的纬向分布形式,继承“单层质面”的面密度的分布形式,故由上式可得

$$\delta = \delta(B) = \sqrt{\delta_E^2 \cos^2 B + \delta_P^2 \sin^2 B} \quad (2)$$

式中 δ 为径向平均密度,指的是椭球某一向径上各点的体密度的平均值。 δ_P 和 δ_E 是两个待定常数,分别为水准椭球极点处的径向平均密度和赤道点处的径向平均密度, B 为旋转椭球的地理纬度。若 u 为旋转椭球归化纬度的余角,则

$$\delta = \sqrt{\delta_E^2 \cos^2 B + \delta_P^2 \sin^2 B} = \sqrt{\frac{\delta_E b^2 \sin^2 u + \delta_P a^2 \cos^2 u}{b^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u}}$$

令 $e\delta = \frac{\delta_e}{\delta_e}$, 则 $\delta = \delta_e \sqrt{\cos^2 B + e^2 \sin^2 B} = \delta_e \sqrt{\frac{b^2 \sin^2 u + e^2 a^2 \cos^2 u}{b^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u}}$

令 $x = \cos su$, 则 $\delta = \delta(\cos su) = \delta(x) = \delta_e \delta_x^s, \delta_x^s = \sqrt{\frac{b^2(1-x^2) + a^2 e^2 x^2}{b^2(1-x^2) + a^2 x^2}}$ (3)

令 $y = \sin u$, 则 $\delta = \delta(\sin u) = \delta(y) = \delta_e \delta_y^s, \delta_y^s = \sqrt{\frac{b^2 y^2 + a^2 e^2 (1-y^2)}{b^2 y^2 + a^2 (1-y^2)}}$ (4)

3 极点重力的密度积分公式

因旋转椭球极点处的离心力为零, 故水准椭球极点重力等于引力。

参见图 1, 设直角坐标系 $P-\zeta\eta$ 以椭球南极为原点, 球坐标 $P-r\lambda$ 以椭球南极为原点, 以短轴向为极轴。

坐标换算关系为

$$\xi = r \sin \psi \cos \lambda, \quad \eta = r \sin \psi \sin \lambda, \quad \zeta = r \cos \psi$$

两坐标系下的椭球面方程为

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{b^2} = 0$$

$$r_1 = \frac{2b(1+e^2)\cos\psi}{1+e^2\cos^2\psi}$$

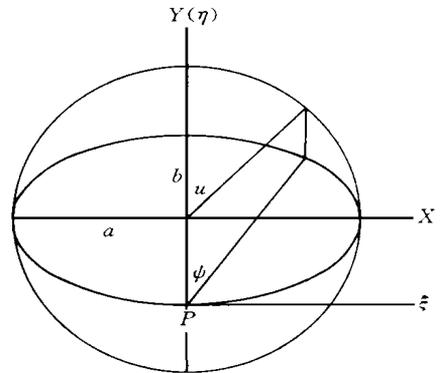


图 1

若 r 为南极点到椭球内流动质元的距离, 则南极点引力(重力)为

$$\begin{aligned} Y_p &= f \int_{\tau} \delta^s d\tau = f \int_{\tau} \delta^s r^2 \sin \psi d\lambda d\psi dr = f \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{r_1} r^2 dr \\ Y_p &= 4\pi f b(1+e^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{1+e^2 \cos^2 \psi} d\psi \end{aligned} \quad (5)$$

椭圆参数方程为

$$X = a \sin u, \quad Y = b \cos u$$

式中 u 为椭球表面点的归化纬度的余角。

设北半球球的 u 为顺时针, $\tan \psi = \frac{X}{b+Y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin u}{(1+\cos u)}$

$$d\psi = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1+\cos u)} du$$

设南半球球的 u 为逆时针, 则 $\tan \psi = \frac{X}{b-Y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin u}{(1-\cos u)}$

$$d\psi = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1-\cos u)} du$$

代入式(5)得

$$Y_p = 4\pi f a(1+e^2) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{(1+e^2 \cos^2 \psi)} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1+\cos u)} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{(1+e^2 \cos^2 \psi)} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1-\cos u)} du \right) \quad (6)$$

北半球球: $\frac{\cos^4 \psi \sin \psi}{1+e^2 \cos^2 \psi} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 \psi + e^2)} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin u}{(1+\cos u)}$

南半球:

$$\frac{1}{(1 + \tan^2\psi + e^2)} = \frac{1 + \cos u}{2(1 + e^2)},$$

$$\frac{1}{(1 + \tan^2\psi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 + \cos u)^3}{(e^2 \sin^2 u + 2\cos u + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\cos^4\psi \sin\psi}{1 + e^2 \cos^2\psi} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2\psi + e^2)} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2\psi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin u}{(1 - \cos u)}$$

$$\frac{1}{(1 + \tan^2\psi + e^2)} = \frac{1 - \cos u}{2(1 + e^2)},$$

$$\frac{1}{(1 + \tan^2\psi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 - \cos u)^3}{(e^2 \sin^2 u - 2\cos u + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

代入式(6)得:

$$\mathcal{Y}_p = 2\pi\gamma b(1 + e^2) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{(1 + \cos u)^2 \sin u}{(e^2 \sin^2 u + 2\cos u + 2)^{\frac{3}{2}}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{(1 - \cos u)^2 \sin u}{(e^2 \sin^2 u - 2\cos u + 2)^{\frac{3}{2}}} du \right) \quad (7)$$

令 $x = \cos u$, 则

$$\mathcal{Y}_p = 2\pi\gamma b(1 + e^2) \left(\int_0^1 \delta \frac{(1 + x)^2 dx}{[e^2(1 - x^2) + 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} + \int_0^1 \delta \frac{(1 - x)^2 dx}{[e^2(1 - x^2) - 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (8)$$

将式(3)代入,得“极点重力的密度积分公式”为

$$\mathcal{Y}_p = 2\pi\gamma b(1 + e^2) \delta_E \left(\int_0^1 \frac{\delta (1 + x)^2}{[e^2(1 - x^2) + 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} dx + \int_0^1 \frac{\delta (1 - x)^2}{[e^2(1 - x^2) - 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} dx \right) \quad (9)$$

4 赤道重力的密度积分公式

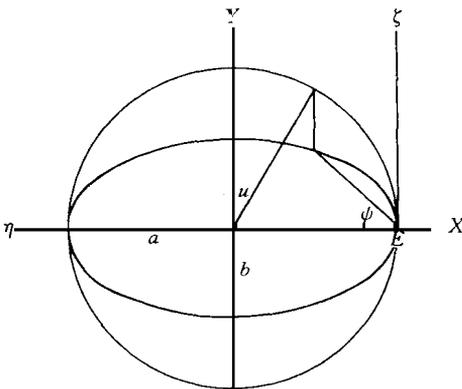


图 2

参见图 2, 设直角坐标系 $E - \xi\eta\zeta$ 以椭球东赤道为原点, ζ 轴与椭球长轴重合, 球坐标 $E - r\psi\lambda$ 以椭球东赤道为原点, 长轴为极轴, ψ 为极距, λ 为南北向的广义经度。

坐标换算关系为

$$\xi = r \sin\psi \cos\lambda \quad \eta = r \sin\psi \sin\lambda \quad \zeta = r \cos\psi$$

两坐标系下的椭球面方程为

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} - \frac{2\zeta}{a} = 0$$

$$r_1 = \frac{2a \cos\psi}{e^2 \sin^2\psi} \cdot \frac{1}{\cos^2\lambda - \frac{1 + e^2 \sin^2\psi}{e^2 \sin^2\psi}}$$

若 r 为东赤道原点到椭球内流动质元的距离, 则东赤道原点的引力为

$$Y_e + \omega^2 a = f \int_{\tau}^{\tau} \delta_{\tau}^{\tau} d\tau = f \int_{\tau}^{\tau} \delta_{\tau}^{\tau} r^2 \sin \psi d\psi d\lambda dr = f \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \cos \psi \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{r_1} dr$$

令 $A = A(\psi) = \frac{1 + e^2 \sin^2 \psi}{e^2 \sin^2 \psi}$

可见 $A > 1$ 则 $r_1 = \frac{2a \cos \psi}{e^2 \sin^2 \psi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \lambda - A}$

故 $Y_e + \omega^2 a = \frac{2af}{e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \cos \psi \cot \psi d\psi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \lambda - A} d\lambda$ (10)

应用复变函数方法可计算出式中定积分为

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \lambda - A} d\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - A}} = \frac{2\pi e^2 \sin^2 \psi}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \psi}}$$

代入式(10)得

$$Y_e + \omega^2 a = 4\pi f a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi d\psi}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \psi}} = F_e^{\text{西}} + F_e^{\text{东}}$$
 (11)

椭圆参数方程

$$X = a \sin u$$

$$Y = b \cos u, \quad u \text{ 为归化余纬}$$

(1) 西半椭圆:

$$\tan \psi = \frac{Y}{a + X} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos u}{(1 + \sin u)}, \quad d\psi = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1 + \sin u)} du$$

代入式(11)得

$$F_e^{\text{西}} = 4\pi f a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 \cos^2 \psi}} \left(-\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1 + \sin u)} du\right)$$

$$\cos^4 \psi \sin \psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\cos u}{(1 + \sin u)}$$

$$F_e^{\text{西}} = 4\pi f \frac{b^2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{A^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{西}}}} \cdot \frac{\cos u}{(1 + \sin u)^2} du$$
 (12)

式中

$$A_{\text{西}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \cos^2 \psi$$

$$1 + \tan^2 \psi = 1 + \frac{\cos^2 u}{(1 + e^2)(1 + \sin u)^2} = \frac{(1 + \sin u)^2 + \cos^2 u + e^2(1 + \sin u)^2}{(1 + e^2)(1 + \sin u)^2}$$

$$A_{\text{西}} = \frac{(1 + e^2)(1 + \sin u)}{2 + e^2(1 + \sin u)}$$

(2) 东半椭圆:

$$\tan \psi = \frac{Y}{a - X} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos u}{(1 - \sin u)}, \quad d\psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1 - \sin u)} du$$

代入(11)得

$$F_e^{\text{东}} = 4\pi f a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 \cos^2 \psi}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{(1 - \sin u)} du$$

$$\cos^4 \psi \sin \psi = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\cos su}{(1 - \sin u)}$$

$$F_e^{\text{东}} = 4\pi f \frac{b^2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta \frac{A_{\text{东}}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{东}}}} \cdot \frac{\cos su}{(1 - \sin u)^2} du \quad (13)$$

式中

$$A_{\text{东}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \cos^2 \psi$$

$$1 + \tan^2 \psi = 1 + \frac{\cos^2 u}{(1 + e^2)(1 - \sin u)^2} = \frac{(1 - \sin u)^2 + \cos^2 u + e^2(1 - \sin u)^2}{(1 + e^2)(1 - \sin u)^2},$$

$$A_{\text{东}} = \frac{(1 + e^2)(1 - \sin u)}{2 + e^2(1 - \sin u)}$$

令 $y = \sin u$, 由式(12)和(13)分别可得

$$F_e^{\text{西}} = 4\pi f \frac{b^2}{a} \int_0^1 \delta \frac{A_{\text{西}}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{西}}}} \cdot \frac{dy}{(1 + y)^2} \quad (14)$$

$$A_{\text{西}} = \frac{(1 + e^2)(1 + y)}{2 + e^2(1 + y)}$$

$$F_e^{\text{东}} = 4\pi f \frac{b^2}{a} \int_0^1 \delta \frac{A_{\text{东}}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{东}}}} \cdot \frac{dy}{(1 - y)^2} \quad (15)$$

$$A_{\text{东}} = \frac{(1 + e^2)(1 - y)}{2 + e^2(1 - y)}$$

将式(14)、(15)和(4)代入(11), 得“赤道重力的密度积分公式”为

$$\gamma_e = 4\pi f \frac{b^2}{a} \delta_e \left(\int_0^1 \frac{(A_{\text{西}})^{\frac{5}{2}} \delta_e^i dy}{(1 + y)^2 \sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{西}}}} + \int_0^1 \frac{(A_{\text{东}})^{\frac{5}{2}} \delta_e^i dy}{(1 - y)^2 \sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{东}}}} \right) - \omega^2 a \quad (16)$$

5 联立方程确定待定常数

为了确定式(16)中的待定常数 δ_e 和 δ_e , 将“极点重力的密度积分公式”式(9)和“赤道重力的密度积分公式”式(16)联立, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a(\gamma_e + \omega^2 a)}{2b} \left(\int_0^1 \frac{\delta_e^i (1+x)^2 dx}{[e^2(1-x^2) + 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} + \int_0^1 \frac{\delta_e^i (1-x)^2 dx}{[e^2(1-x^2) - 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ \frac{\gamma_p}{1 + e^2} \left(\int_0^1 \frac{A_{\text{西}}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{西}}}} \frac{\delta_e^i dy}{(1 + y)^2} + \int_0^1 \frac{A_{\text{东}}^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 A_{\text{东}}}} \frac{\delta_e^i dy}{(1 - y)^2} \right) \\ \sigma_E = \frac{\gamma_p}{2\pi f b(1 + e^2)} \left(\int_0^1 \frac{\delta_e^i (1+x)^2 dx}{[e^2(1-x^2) + 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} + \int_0^1 \frac{\delta_e^i (1-x)^2 dx}{[e^2(1-x^2) - 2x + 2]^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot 1 \end{array} \right.$$

数值积分方法解联立方程得

$$\delta_e^2 = 0.993\ 797\ 92, \quad \delta_e = 5.526\ 625 \text{ g/cm}^3$$

6 讨论

以上两常数之一为 δ_p 比 δ_e 的平方值, 故可算得 $\delta_p = 5.509460 \text{ g/cm}^3$ 。将按照水准椭球的“极点重力条件”和“赤道重力条件”所确定的两个密度常数 $\delta_p = 5.509460 \text{ g/cm}^3$ 和 $\delta_e = 5.526625 \text{ g/cm}^3$ 代入式(2)即为水准椭球纬向密度的估值公式。

在求解待定常数的数值计算过程中, 联立方程中的常数采用了 1980 大地参考系统中的 $a = 637813700 \text{ cm}$, $b = 635675200 \text{ cm}$, $\omega = 7.292115 \times 10^{-11} \text{ S}^{-1}$; 水准椭球的极点重力与赤道重力值采用文献[2]中的数值: $\gamma_p = 983.218637 \text{ cm/s}^2$, $\gamma_e = 978.032726 \text{ cm/s}^2$ 。

在大地测量学中, 水准椭球是真实地球的数理模型, 水准椭球的密度分布与地球的密度分布密切相关。本文的“纬向密度分布”是采用“正演方法”得到的, 故不涉及“反演方法”中的非唯一性问题。当然, 这个模型只是本文前言中莫里茨所说的水准椭球内的那种“合理的”物质分布, 而不是唯一的物质分布。这种对水准椭球来说的“合理性”对真实地球是否合理, 则有待进一步研究来证实。

在本文的写作过程中, 作者得到了张赤军研究员和汪汉胜副研究员的帮助, 在此表示衷心感谢!

7 参考文献

- 1 莫里茨·H. 理论大地测量学和地球内部物理学 陈俊勇等译 北京: 测绘出版社, 1992 92
- 2 郝晓光 对重力测量纬度改正概念的修正 地壳形变与地震, 1996, 16(3)
- 3 郝晓光 参数椭球表面的重力 地球科学, 1997, 22(2)
- 4 郭俊义 物理大地测量学基础 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1994 135~ 136
- 5 西安交通大学高等数学教研室 工程数学复变函数 北京: 人民教育出版社, 1980 65~ 105