

对重力测量纬度改正概念的修正

郝 晓 光

(中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077)

摘 要 推导了“匀质椭球”表面重力和表面法向重力的封闭公式, 基于 1980 大地参考系统, 计算出“匀质椭球”表面重力与“水准椭球”表面重力的差别, 并研究了这种差别的数理结构。在此基础上, 对重力测量纬度改正的概念进行了修正。

主题词: 重力异常 地球椭球 正常场校正

MODIFICATION OF CONCEPTION OF LATITUDE CORRECTION IN GRAVITY MEASUREMENT

Hao Xiaoguang

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077*)

Abstract

The formula of uniform ellipsoid's normal gravity is derived. Based on geodetic reference system 1980, uniform ellipsoid's gravity and level ellipsoid's gravity are calculated and their distinction is examined to modify the conception of latitude correction.

Key words: gravity anomaly, earth ellipsoid, normal field correction

1 前 言

研究地球形状和研究地球密度, 是重力测量学的基本任务。利用重力资料研究地球形状的理论和方法已得到充分发展, 相比之下, 利用重力资料研究地球密度的理论和方法显得比较薄弱。例如, 重力异常是重力与正常重力之差, 而用于研究地球形状的正常重力是由“水准椭球”定义的, 这种重力异常的算法在某些场合又称为重力测量的“纬度改正”。实际上, 不能认为采用“水准椭球”进行的“纬度改正”是一种“纯几何的纬度改正”。由于人为设置的“水准椭球”的密度分布是非匀质的, 这种非匀质的密度分布对“水准椭球”表面的正常重力产生影响, 使得经“纬度改正”后的重力异常含有与真实地球的密度分布不相符的“密度因素”。由于受到斯托克司定理的支撑, “水准椭球非匀质的密度因素”并不影响对地球形状的研究。但是, 用这种受到非匀质密度影响的重力异常来研究地球密度是不合适的。因此, 有必要对“匀质椭球”

* 本文 1996 年 1 月 22 日收到, 同年 2 月 5 日收到修改稿

定义的正常重力及其与“水准椭球”正常重力的差别进行分析与研究。

2 “匀质椭球”表面重力公式的推导

直角坐标与球坐标下的旋转椭球面方程为：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \frac{^2\sin^2}{a^2} + \frac{^2\cos^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

坐标换算公式为：

$$x = \sin \cos, y = \sin \sin, z = \cos$$

$$x = \frac{a^2 \cos B \cos}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, y = \frac{a^2 \cos B \sin}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, z = \frac{b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

$$\cos = \frac{b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \sin = \frac{a^2 \cos B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}$$

式中 为极距, 为经度, B 为椭球地理纬度。

由引力位理论可知, 匀质旋转椭球体内部点的引力分量为：

$$F_x = f \int \frac{-x}{r^3} d, \quad F_y = f \int \frac{-y}{r^3} d, \quad F_z = f \int \frac{-z}{r^3} d \tag{2}$$

式中 (x, y, z) 为椭球内部任意点坐标, (, ,) 为椭球内积分流动点坐标。对上式积分后得：

$$F_x = Px, \quad F_y = Py, \quad F_z = Qz \tag{3}$$

式中: $P = 2 f \frac{1+\dot{e}^2}{\dot{e}^3} (\arctg \dot{e} - \frac{\dot{e}}{1+\dot{e}^2})$, $Q = 4 f \frac{1+\dot{e}^2}{\dot{e}^3} (\dot{e} - \arctg \dot{e})$ 。

将第二偏心率 $\dot{e}^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ 和密度 $= \frac{3M}{4 a^2 b}$ 代入, 得：

$$P = \frac{3fM}{2 \dot{e}^3 b^3} (\arctg \dot{e} - \frac{\dot{e}}{1+\dot{e}^2}), \quad Q = \frac{3fM}{\dot{e}^3 b^3} (\dot{e} - \arctg \dot{e}) \tag{4}$$

于是“匀质椭球”的内部重力为：

$$\bar{g}_i = (P - ^2) x \bar{i} + (P - ^2) y \bar{j} + Qz \bar{k} \tag{5}$$

因质体引力位及其一阶导数为连续函数, 故内部重力公式也适用于表面重力。于是, “匀质椭球”的表面重力为：

$$\bar{g}_0 = (P - ^2) x \bar{i} + (P - ^2) y \bar{j} + Qz \bar{k} \tag{6}$$

式中 (x, y, z) 为椭球表面点的坐标。对上式取模得：

$$|\bar{g}_0| = \sqrt{(P - ^2)^2 x^2 + (P - ^2)^2 y^2 + Q^2 z^2} \tag{7}$$

坐标换算后得：

$$g_0 = \frac{\sqrt{(P - ^2)^2 a^4 \cos^2 B + Q^2 b^4 \sin^2 B}}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \tag{8}$$

分别令 $B = 0^\circ, B = 90^\circ$, 则匀质椭球的赤道重力 g_e 和极点重力 g_p 为：

$$g_e = (P - ^2) a, \quad g_p = Qb \tag{9}$$

将 g_e 和 g_p 变换后代入(8)式, 得“匀质椭球”表面重力的封闭公式为：

$$g_0 = \frac{\sqrt{a^2 g_e^2 \cos^2 B + b^2 g_p^2 \sin^2 B}}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \quad (10)$$

将(4)式代入(9)式后得:

$$\left. \begin{aligned} g_e &= \frac{fM}{ab} \left[\frac{3}{2e^2} \left(\frac{1+e^2}{e} \arctg e - 1 \right) - m \right] \\ g_p &= \frac{fM}{a^2} \frac{3(1+e^2)}{e} \left(1 - \frac{\arctg e}{e} \right) \end{aligned} \right\}$$

(,

}

}

(14)

式中的 m 为“水准椭球”的动力形状因子,与“匀质椭球”的动力形状因子相同。

采用 1980 大地参考系统,

$$\begin{aligned} a &= 637\,813\,700(\text{cm}), \quad b = 635\,675\,200(\text{cm}) \\ fM &= 3\,986\,005 \times 10^{14}(\text{cm}^3/\text{s}^2), \quad = 7\,292\,115 \times 10^{-11}\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

算出“匀质椭球”与“水准椭球”的赤道重力、极点重力及重力扁率为：

$$g_e = 978.412\ 041(10^{-2}\text{ms}^{-2}), g_p = 982.462\ 550(10^{-2}\text{ms}^{-2}), \gamma_e = \frac{g_p - g_e}{g_e} = 4.139\ 881 \times 10^{-3}$$

$$g_e = 978.032\ 726(10^{-2}\text{ms}^{-2}), g_p = 983.218\ 637(10^{-2}\text{ms}^{-2}), \gamma_e = \frac{g_p - g_e}{g_e} = 5.302\ 427 \times 10^{-3}$$

1980 大地参考系统采用便于实用的近似公式计算 γ_e 、 γ_p 和 γ_0 ，与(13)、(14)式的计算结果略有不同(γ_0 的偏差在全球约为 $-60 \sim 40 \times 10^{-8}\text{ms}^{-2}$)。为了在理论上进行严格的数值对照，本文的数值计算均采用严密的封闭公式进行。

将以上计算结果代入(10)~(14)式，便可得到 g_0 、 g_n 、 γ_0 。另外，可算出“匀质椭球”与“水准椭球”的极点重力与赤道重力差以及重力扁率的关系为：

$$dg = g_p - g_e = 4.050\ 509(10^{-2}\text{ms}^{-2}), d\gamma = \gamma_p - \gamma_e = 5.185\ 911(10^{-2}\text{ms}^{-2})$$

$$d\gamma - dg = 1.135\ 402(10^{-2}\text{ms}^{-2}), \gamma_e = 1.280\ 8\ \gamma_g$$

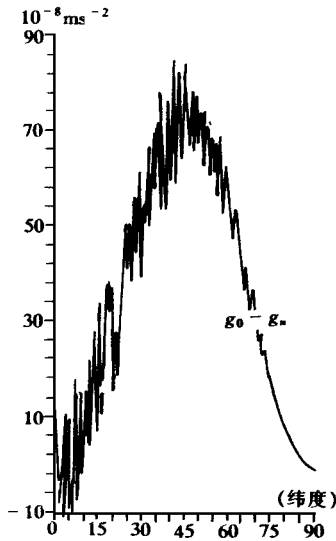


图 1 “匀质椭球”的表面法向重力与表面重力的差值

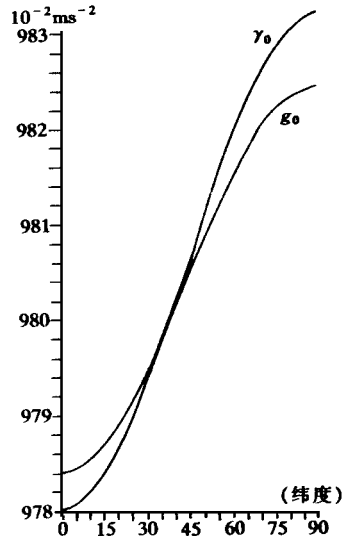


图 2 “匀质椭球”与“水准椭球”表面重力的对比

4 结果分析

由图 1 可见， g_0 与 g_n 的差值不大，全球不到 $100 \times 10^{-5}\text{ms}^{-2}$ ，对重力异常影响不大。

由图 2 可见， g_0 曲线与 γ_0 曲线相互交叉，偏差较大，且两曲线的关系是非线性变化的。如果令(10)式等于(13)式，可解算出两曲线的交点纬度为 $35^{\circ}21'32''$ ；在赤道， $g_e - \gamma_e = 379.315(10^{-5}\text{ms}^{-2})$ ；在极点， $g_p - \gamma_p = -756.087(10^{-5}\text{ms}^{-2})$ ；全球最大偏差为 $1.135\ 402 \times 10^{-5}\text{ms}^{-2}$ 。由于“匀质椭球”与“水准椭球”均采用 1980 大地参考系统计算椭球表面的正常重力，故两曲线的这种“非线性偏差”是由“匀质椭球”与“水准椭球”不同的密度分布造成的，也就是说，这种“非线性偏差”是由“水准椭球”的“非匀质密度”造成的。这种说法可通过以下的计

算结果得到证实。

由物理大地测量学可知,“水准椭球”由“内体”和“外层”两部分构成。“内体”为“麦克劳林椭球”,“外层”为“单层椭球面”。

“麦克劳林椭球”为匀质椭球,但为了满足“水准椭球”表面重力位相等的条件,“麦克劳林椭球”的质量与自转角速度需满足以下关系:

$$fM_{\text{麦}} = \frac{2^2 a^3 e^3}{3[(3 + e^2) \arctg e - 3e] \sqrt{1 + e^2}}$$

将 1980 大地参考系统中的 a 、 b 、代入可得:

$$fM_{\text{麦}} = 5130245 \times 10^{14} (\text{cm}^3/\text{s}^2) \quad , \quad M_{\text{麦}} = 1.2871M$$

由于“麦克劳林椭球”的质量大于 1980 大地参考系统中的 M ,为了满足斯托克司定理,“水准椭球”的“外层”除了应满足其表面引力位为常量外,还应保证其“负质量”恰好抵消“内体”多余的质量。能够满足这两个要求的“单层椭球面”的面密度是非匀质的,其公式为:

$$\mu = \frac{(M - M_{\text{麦}}) \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}{4 a^2 b} = - \frac{0.2871 M \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}{4 a^2 b} < 0$$

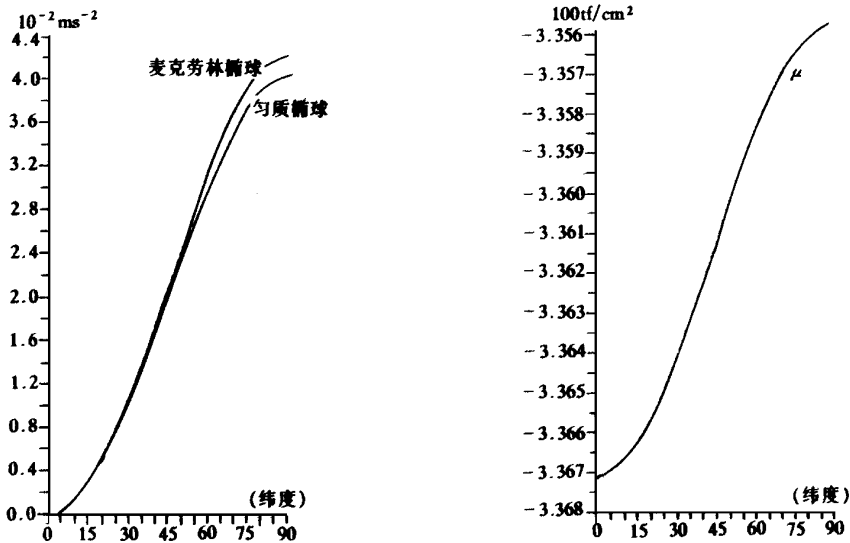


图 3 “匀质椭球”与“麦克劳林椭球”的相对重力变化 图 4 单层椭球面的非匀质密度的变化

图 3 是“匀质椭球”与“麦克劳林椭球”的表面重力减去自身赤道重力的相对重力变化,图中两曲线的相对偏差不大。由麦克劳林定理可知,两同焦距匀质椭球对外部点的引力位的比例,等于它们质量的比例。“麦克劳林椭球”也是匀质的,其质量是“匀质椭球”质量的 1.28 倍,故它们的引力也应是 1.28 的倍数关系,不存在相对偏差。但由于“麦克劳林椭球”与“匀质椭球”的形状相同,故二者的离心力相等、而不是 1.28 的倍数关系。因此,图中重力曲线的相对偏差并不是由于“麦克劳林椭球”与“匀质椭球”的引力不同,而是由于二者的离心力相同引起的。

由图 4 可见, μ 值的全球变化范围为 $1.2 \times 10^6 (\text{g}/\text{cm}^2)$,正是这种“非匀质密度”的变化导

致了“匀质椭球”表面重力与“水准椭球”表面重力的“非线性偏差”。

由(10)、(11)式与(13)、(14)式可见, $g_e > g_p$, 故 g_0 随纬度的变化较 g_p 随纬度的变化要平缓一些。采用(10~11)式进行纬度改正比采用(13~14)式进行纬度改正更能突出重力异常中的密度效应。

5 结 语

综上所述,采用“水准椭球”进行的“纬度改正”并不是“纯几何的纬度改正”。由于“单层椭球面”的负密度是非匀质的,经这种“纬度改正”后的重力异常含有与真实地球的密度分布不相符的“人为的非匀质的负密度因素”。

研究地球密度与研究地球形状的研究目的不同,故研究方法也应有所区别。研究地球密度不象研究地球形状那样受到布隆斯公式在算法上的制约,完全可以摆脱表面等位的条件约束采用类似地球的密度分布来塑造椭球。“匀质椭球”虽然离地球的真实密度分布相去甚远,但不含有“水准椭球”的“非匀质负密度”;故可认为采用“匀质椭球”进行的纬度改正是一种不含密度因素的“纯几何的纬度改正”。如采用“水准椭球”来研究地球的密度,则应设法考虑其“非匀质负密度”的影响,这种影响与“匀质椭球”相比,全球最大偏差为 $1.135402(10^{-2} \text{ ms}^{-2})$ 。

在本文的写作过程中,得到许厚泽院士、张赤军研究员和黄建梁助理研究员的帮助和指导,在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

- 1 方俊. 重力测量与地球形状学. 北京:科学出版社,1975,64~75.
- 2 郭俊义. 物理大地测量学基础. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994,117~163.
- 3 管泽霖,宁津生. 地球形状及外部重力场. 北京:测绘出版社,1981,154~189.
- 4 重力勘探资料解释手册. 北京:地质出版社,1985,13~19.
- 5 W. A. 海斯卡涅, H. 莫里斯. 物理大地测量学. 卢福康,胡国理译. 北京:测绘出版社,1979,157~173.
- 6 Moritz H. Geodetic reference system 1980, In. C. C. Tscherning (ed.), The Geodesist's Handbook, Bull. Geod., 1984, 58, 388~398.